


Brevet de technicien supérieur Polynésie

10 mai 2017 - Services informatiques aux organisations

Épreuve obligatoire

Exercice 1

11 points

Cinq joueurs, notés A, B, C, D et E, jouent régulièrement à un jeu en ligne.

Chaque partie de ce jeu oppose deux adversaires.

Le tableau suivant donne, pour chacun des cinq joueurs, la liste des adversaires qu'il a déjà battus.

Le joueur	a déjà battu
A	B, D
B	C
C	B, D
D	E
E	D

Ainsi, par exemple, le joueur C a déjà battu les joueurs B et D.

1. Graphe orienté associé à la situation

- a.** En considérant le tableau précédent comme un tableau de successeurs, représenter la situation par un graphe orienté G , dans lequel un arc relie un sommet x à un sommet y si le joueur x a déjà battu le joueur y .
- b.** Écrire la matrice d'adjacence M du graphe G .
- c.** Recopier et compléter le tableau des **prédécesseurs** dans le graphe G .

Le joueur	a déjà
A	
B	
C	
D	
E	

- d.** Le graphe G contient-il un circuit? Contient-il un chemin hamiltonien? Justifier les réponses.

2. Dans cette question, on note $J = \{A, B, C, D, E\}$ l'ensemble des cinq joueurs.

On note $V(x; y)$ le prédicat : « le joueur x a déjà battu le joueur y ».

Ainsi, la valeur $V(A; B)$ est VRAI, et la valeur de $V(B; A)$ est FAUX.

On définit trois prédicats :

P1 : $\forall x \in J, \exists y \in J, x \neq y$ et $V(x; y)$

P2 : $\exists x \in J, \forall y \in J, x \neq y$ et $V(x; y)$

P3 : $\exists y \in J, \forall x \in J, x \neq y$ et $V(x; y)$

Associer à chaque prédicat P1, P2, P3, celle des trois phrases suivantes qui lui correspond parmi les phrases suivantes. Aucune justification n'est demandée.

« Il existe un joueur qui a été battu par tous les autres joueurs ».

« Tous les joueurs ont battu au moins un autre joueur ».

« Il existe un joueur qui a battu tous les autres joueurs ».

3. Un joueur reçoit un bonus lorsqu'il vérifie l'un au moins des trois critères suivants :
- le joueur a participé à 20 parties ou davantage, et il a affronté plusieurs adversaires différents;
 - le joueur n'a pas affronté plusieurs adversaires différents, et il a obtenu strictement plus de victoires que de défaites;
 - le joueur n'a pas obtenu strictement plus de victoires que de défaites, et il a participé à 20 parties ou davantage.

On définit les variables booléennes a, b, c de la façon suivante :

$a = 1$ si le joueur a participé à 20 parties ou davantage; $a = 0$ sinon;

$b = 1$ si le joueur a affronté plusieurs adversaires différents; $b = 0$ sinon;

$c = 1$ si le joueur a obtenu strictement plus de victoires que de défaites; $c = 0$ sinon.

- a. Écrire une expression booléenne F traduisant les conditions permettant à un joueur d'obtenir le bonus.
 - b. À l'aide d'un tableau de Karnaugh ou d'un calcul booléen, déterminer une écriture simplifiée de F sous forme d'une somme de deux termes.
 - c. En déduire une formulation simplifiée des critères permettant à un joueur d'obtenir le bonus.
4. On note S la relation « successeur » dans le graphe G .

Ainsi, l'écriture « xSy » signifie que x a pour successeur y dans ce graphe.

On rappelle les définitions suivantes :

- Une relation binaire R sur un ensemble E est *symétrique* si pour tous x et y dans E :

$$xRy \Rightarrow yRx.$$

- Une relation binaire sur un ensemble E est *transitive* si pour tous x, y et z dans E :

$$xRy \text{ et } yRz \Rightarrow xRz.$$

- a. La relation S est-elle transitive? Justifier.
- b. Quel(s) arc(s) faut-il ajouter au graphe pour rendre la relation S symétrique?

Exercice 2

9 points

Le but de cet exercice est d'étudier une façon de parcourir un fichier de 195 clients, dont les fiches sont numérotées de 0 à 194.

Les deux parties peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A - Étude d'une suite

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 3u_n + 4.$$

1. Déterminer u_1 et u_2 .
2. Justifier que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n + 2$.
 - a. Déterminer v_0, v_1 et v_2 .
 - b. Justifier que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
 - c. Déterminer une expression de v_n en fonction de n .

4. En déduire, que pour tout entier naturel n , on a : $u_n = 7 \times 3^n - 2$.

Partie B - Étude d'un mode de parcours du fichier

Pour tout entier naturel n , on note w_n le reste de la division euclidienne de $7 \times 3^n - 2$ par 195.

On a ainsi, en particulier : $w_n \equiv 7 \times 3^n - 2 \pmod{195}$.

On parcourt le fichier à l'aide de la suite (w_n) en déplaçant un curseur de la façon suivante :

- initialement, le curseur est positionné sur la fiche numéro 5, qui correspond à la valeur w_0 ;
- le curseur se déplace ensuite sur la fiche numéro 19, qui correspond à la valeur w_1 ;
- plus généralement, après n déplacements, le curseur est positionné sur la fiche dont le numéro correspond à la valeur de w_n .

1. Justifier que $w_5 = 139$.
2. Justifier que $3^{13} \equiv 3 \pmod{195}$.
En déduire que $w_{13} = 19$.
3. Soit n un entier naturel quelconque.
 - a. Démontrer que $w_{n+13} - w_{n+1} \equiv 7 \times 3^n (3^{13} - 3) \pmod{195}$.
 - b. En déduire, en utilisant la question 2., que $w_{n+13} = w_{n+1}$.
 - c. Interpréter le résultat précédent concernant le positionnement du curseur.
4. On donne la liste des 15 premières valeurs de w_n :

5 -- 19 -- 61 -- 187 -- 175 -- 139 -- 31 -- 97 -- 100 -- 109 -- 136 -- 22 -- 70 -- 19 -- 61.

On considère l'ensemble $E = \{0, 1, 2, 3, \dots, 193, 194\}$ et l'application f de E dans E , définie pour tout entier n de l'ensemble E par : $f(n) = w_n$.

- a. L'application f est-elle injective? Justifier la réponse.
- b. L'application f est-elle surjective? Justifier la réponse.