

∞ BTS Métropole 12 mai 2016 ∞
Services informatiques aux organisations

Épreuve obligatoire

A. P. M. E. P.

Exercice 1

9 points

La planification d'un projet de création d'un robot requiert les sept tâches listées ci-dessous.

Description de la tâche	Tâche	Durée (en jour)	Prédécesseurs
Achat de la structure	A	1	-
Modélisation numérique	B	5	A
Montage de la maquette	C	1	A, D
Achat des capteurs	D	3	-
Développement du programme	E	1	D
Test du programme sur la maquette et ajustements	F	4	C,E
Négociation des frais de fabrication	G	1	B,F

- Déterminer le niveau de chacun des sommets.
- Donner le tableau des successeurs de chaque sommet.
- Construire le graphe d'ordonnancement du projet (méthode M. P. M. ou P. E. R. T.) en incluant les dates au plus tôt et au plus tard.
- Donner un chemin critique et la durée minimale du projet.
- Calculer la marge libre et la marge totale de la tâche A.
- La tâche A commence avec un jour de retard.
 - Ce retard aura-t-il une incidence sur le début des tâches suivantes? Justifier.
 - Ce retard aura-t-il une incidence sur la date de fin du projet? Justifier.

Exercice 2

5 points

Dans un jeu vidéo de stratégie, le but est de franchir des niveaux successifs pour augmenter la résistance d'un bâtiment. Au début du jeu, le joueur commence au niveau 0 avec un bâtiment de résistance 5 000. Au cours de la partie, le joueur gagne des pièces d'or qui lui permettent de passer des niveaux tout en augmentant la résistance du bâtiment. Par exemple, il en coûte 450 pièces d'or pour passer au niveau 1.

L'entier naturel n désigne le niveau du jeu atteint. On note r_n la résistance du bâtiment au niveau n et u_n le coût en pièce d'or pour passer du niveau n au niveau $n + 1$.

On a donc $r_0 = 5\,000$ et $u_0 = 450$.

- Dans la programmation du jeu, la suite (r_n) est une suite arithmétique de raison 1 000.
 - Donner une expression de son terme général.
 - Calculer la résistance d'un bâtiment de niveau 20.
- Le jeu est programmé pour que la suite (u_n) soit une suite géométrique de raison 1,5.
 - Donner une expression du terme général u_n de cette suite.

- b. Calculer le coût en pièce d'or pour améliorer un bâtiment du niveau 19 au niveau 20. Le résultat sera arrondi à l'unité.
3. On s'intéresse à plusieurs améliorations successives d'un bâtiment.
- a. Le coût total en pièce d'or pour améliorer successivement un bâtiment du niveau 0 au niveau 20 est égal à la somme des 20 premiers termes de la suite (u_n) , c'est-à-dire la somme $u_0 + u_1 + \dots + u_{19}$.
Calculer ce coût total en pièce d'or, arrondi à l'unité.
- b. En récoltant 500 000 pièces d'or au cours de la partie, quel est le niveau atteint par le joueur? Justifier la réponse.

Exercice 3**6 points**

Lors de la transmission d'un message entre un émetteur et un récepteur, il est possible que le message soit altéré par des erreurs. On utilisera le vocabulaire suivant :

- un *mot* est une suite de 4 bits;
- le *code initial* est le code envoyé par l'émetteur, il est constitué de 7 bits;
- le *code reçu* est le code reçu par le récepteur, il est constitué de 7 bits.

On s'intéresse dans cet exercice à un code correcteur dit code de Hamming dont l'intérêt est de permettre de retrouver le code initial si une erreur intervient dans la transmission du code.

1. Travail préliminaire.

On appelle « réduction d'un entier modulo 2 » le reste de la division euclidienne de cet entier par 2. Par exemple $11 = 2 \times 5 + 1$ donc la réduction de 11 modulo 2 est égale à 1.

- a. Donner les 3 plus petits entiers naturels dont la réduction modulo 2 est égale à 1.
- b. Quelle est la réduction modulo 2 d'un entier pair?

Dans la suite de cet exercice, tous les produits de matrices seront calculés de façon habituelle, puis on donnera la réduction modulo 2 de tous les coefficients.

2. Codage d'un mot

On veut transmettre un mot de 4 bits. On le représente par une matrice à 1 ligne et 4 colonnes, par exemple le mot 0100 est représenté par la matrice :

$$m = (0 \quad 1 \quad 0 \quad 0).$$

Pour calculer son codage, on définit la matrice G suivante :

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La fonction de codage C , qui donne le code c , est la fonction injective définie pour tout mot m de longueur 4 par le produit de matrices :

$$c = C(m) = m \times G.$$

Par exemple pour le mot $m = (1 \quad 1 \quad 0 \quad 0)$, on a le code $c = (0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1)$ car :

$$(1 \quad 1 \quad 0 \quad 0) \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (2 \quad 2 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1)$$

et, après réduction modulo 2, on obtient bien : $c = C(m) = (0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1)$.

- a. Calculer le code du mot $m = (0 \ 1 \ 1 \ 0)$.
On rappelle que les coefficients de la matrice obtenue doivent être réduits modulo 2.
- b. Parmi les réponses suivantes, laquelle traduit le fait que la fonction de codage C est injective?
Recopier sur la copie la seule bonne réponse.
- Le code d'un mot contient 7 bits différents.
 - Il existe un code de 7 bits.
 - Deux mots différents ont des codes différents.
 - Tout code de 7 bits est l'image d'un mot de 4 bits.

3. Décodage

La fonction de décodage D est la fonction surjective qui associe à tout code c le mot $m = D(c)$ tel que $c = C(m)$.

Le processus de codage-décodage permet donc de coder un mot avant sa transmission et de retrouver ce mot après sa transmission.

- a. Soit H la matrice à 7 lignes et 4 colonnes définie par : $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On remarque que l'on a $G \times H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que l'égalité $c = m \times G$ implique l'égalité $m = c \times H$.

- b. On reçoit le code $c = (1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0)$. Il n'y a pas eu d'erreur de transmission.
 Retrouver le mot m qui a été codé par l'émetteur.

4. Vérification de la présence d'une erreur et correction

Dans la suite, on appelle erreur le remplacement d'un seul bit du code initial (0 au lieu de 1, ou 1 au lieu de 0). Pour vérifier l'apparition d'une telle erreur dans le code reçu c et la corriger, on utilise une matrice dite de parité P définie par :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On calcule le produit matriciel $c \times P$. Les coefficients résultants sont réduits modulo 2.

Si le résultat est $(0 \ 0 \ 0)$ alors il n'y a pas eu d'erreur au sens défini ci-dessus.

Par exemple, si le code reçu est $c = (1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1)$ alors $c \times P = (0 \ 0 \ 0)$, il n'y a pas eu d'erreur au sens défini ci-dessus.

Sinon, le résultat obtenu correspond à la décomposition binaire de la position de l'erreur.

Par exemple, si le code reçu est $c = (1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1)$ on a $c \times P = (1 \ 0 \ 0)$, donc il y a eu une erreur. Comme $100_2 = 4$, l'erreur porte sur le 4^e bit en partant de la gauche, on en déduit que le code initial était

(1 1 0 1 0 0 1).

Parmi les deux codes suivants, déterminer celui qui contient une erreur puis la corriger. Justifier (on ne demande pas le mot m correspondant à ce code).

• (1 1 1 0 1 1 0) ; • (0 0 1 0 1 1 0).