Brevet de technicien supérieur groupement B1
10 mai 2021 - Métropole–Antilles–Guyane–Polynésie

Exercice 1 **10 points**

Une étude est menée concernant le train d'atterrissage d'un certain type d'hélicoptère.
Ce train d'atterrissage est composé d'une roue et d'un amortisseur oléopneumatique permettant d'absorber l'énergie de l'impact au moment de l'atterrissage.

On note $f(t)$ la hauteur, en mètre, du centre de gravité de l'hélicoptère par rapport au sol à l'instant t exprimé en seconde.
On suppose que f est une fonction de la variable réelle t définie et deux fois dérivable sur $[0~;~+\infty[$.

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

A. Résolution d'une équation différentielle

Une étude mécanique montre que la fonction f est solution de l'équation différentielle

$$(E):\quad y'' + 3y' + 2y = 4,$$

où y est une fonction inconnue de la variable réelle t, définie et deux fois dérivable sur $[0~;~+\infty[$, y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. **a.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $r^2 + 3r + 2 = 0$,

   b. En déduire les solutions de l'équation différentielle

   $$(E_0):\quad y'' + 3y' + 2y = 0.$$

   On fournit les formules suivantes.

Équations	Solutions sur un intervalle I
Équation différentielle : $ay'' + by' + cy = 0$, Équation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0$ de discriminant Δ.	Si $\Delta > 0$, $y(t) = \lambda \mathrm{e}^{r_1 t} + \mu \mathrm{e}^{r_2 t}$ où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique. Si $\Delta = 0$, $y(t) = (\lambda t + \mu)\mathrm{e}^{rt}$ où r est la racine double de l'équation caractéristique, Si $\Delta < 0$, $y(t) = [\lambda\cos(\beta t) + \mu\sin(\beta t)]\mathrm{e}^{\alpha t}$ où $r_1 = \alpha + \mathrm{i}\beta$ et $r_2 = \alpha - \mathrm{i}\beta$ sont les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique.

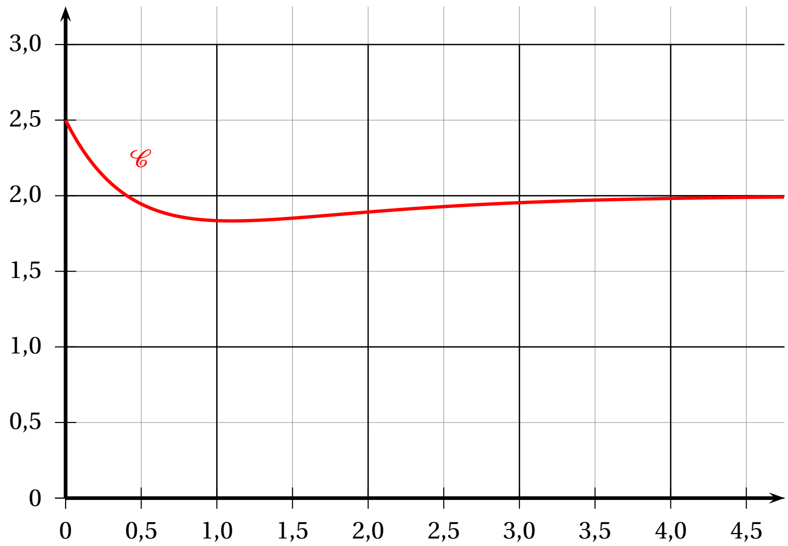
2. Soit k un nombre réel. On définit la fonction constante g sur $[0~;~+\infty[$ par $g(t) = k$.
   Déterminer k pour que la fonction g soit solution de l'équation différentielle (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

B. Étude de la fonction *f*

On admet que la fonction f correspondant à la hauteur du centre de gravité de l'hélicoptère est définie sur $[0~;~+\infty[$ par

$$f(t) = -\mathrm{e}^{-t} + 1,5\mathrm{e}^{-2t} + 2.$$

Sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous.



1. Déterminer la hauteur du centre de gravité de l'hélicoptère au moment de l'atterrissage à l'instant $t = 0$.

2. On admet que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-t} = \lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-2t} = 0$.

   a. Calculer $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t)$.

   b. En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet une droite asymptote dont on donnera une équation.

3. **a.** À l'aide du graphique, conjecturer le sens de variation de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty]$.

   b. Un logiciel de calcul formel donne ci-dessous une expression de la dérivée f' de la fonction f. Ce résultat est admis.

1	$f(t) : -\mathrm{e}^{-t} + 1,5\mathrm{e}^{-2t} + 2$ $\rightarrow f(t) := -\mathrm{e}^{-t} + \dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{-2t} + 2$
2	Dérivée$(f(t), t)$ $\rightarrow \mathrm{e}^{-t} - 3\mathrm{e}^{-2t}$

   Montrer que cette dérivée peut aussi s'écrire : $f'(t) = \mathrm{e}^{-2t}\left(\mathrm{e}^{t} - 3\right)$.

   c. Résoudre sur $[0\,;\,+\infty]$ l'inéquation $\mathrm{e}^{t} - 3 \geqslant 0$.

   d. En déduire le signe de $f'(t)$ sur $[0\,;\,+\infty]$.

   e. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty]$.

Étude locale

On rappelle que la fonction f est définie sur $[0\,;\,+\infty]$ par

$$f(t) = -\mathrm{e}^{-t} + 1,5\mathrm{e}^{-2t} + 2$$

et que sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un repère orthogonal est donnée dans la partie B.
Un logiciel de calcul formel affiche la partie régulière du développement limité à l'ordre 2 de la fonction f au voisinage de zéro.

3 PolynômeTaylor$(f(t), t, 0, 2)$

$$\frac{5}{2} - 2t + \frac{5}{2}t^2$$

1. *Les deux questions suivantes sont des questions à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification.*
La réponse juste rapporte 1 *point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.*

a. Le développement limité de la fonction f à l'ordre 2 au voisinage de 0 est :

$\frac{5}{2} - 2t + \frac{5}{2}t^2$	$\frac{5}{2} - 2t + \frac{5}{2}t^2 + t^2\epsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t \to +\infty} \epsilon(t) = 0$	$\frac{5}{2} - 2t + \frac{5}{2}t^2 + t^2\epsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t \to 0} \epsilon(t) = 0$

b. Une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est :

$y = \frac{5}{2}$	$y = \frac{5}{2} - 2t$	$y = \frac{5}{2} - 2t + \frac{5}{2}t^2$

2. Étudier la position relative, au voisinage du point d'abscisse 0, de la courbe $\mathscr{C}$ et de la tangente T.

EXERCICE 2 **10 points**

Les quatre parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

A. Loi binomiale

Une enquête réalisée auprès d'une grande enseigne de garages automobile permet d'admettre que la probabilité qu'une voiture prélevée au hasard parmi les garages de cette enseigne soit réparée et rendue à son propriétaire le jour même de sa réception est $0,7$.
On interroge 100 clients au hasard de cette enseigne. Le nombre de clients est suffisamment important pour assimiler ce sondage à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 100 clients ainsi interrogés, associe le nombre de clients dont le véhicule est restitué le jour même.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer l'espérance de X puis en donner une interprétation.
3. Calculer la valeur, arrondie au dixième, de l'écart type de la variable aléatoire X.
4. Calculer la probabilité que, sur un échantillon aléatoire de 100 clients, exactement 60 clients aient récupéré leur voiture le jour même. (Arrondir à 10^{-3}.)

B. Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire X définie dans la partie A par la loi normale de moyenne 70 et d'écart type $4,6$.
On note Y une variable aléatoire de loi normale de moyenne 70 et d'écart type $4,6$.
En utilisant cette approximation, calculer :

1. la probabilité, arrondie à 10^{-3}, qu'au moins 80 voitures, sur un échantillon de taille 100, soient restituées à leur propriétaire le jour même, c'est-à-dire $P(Y \geqslant 79,5)$;
2. la probabilité, arrondie à 10^{-3}, que le nombre de voitures, sur un échantillon de taille 100, restituées à leur propriétaire le jour même soit compris entre 60 et 80, c'est-à-dire $P(59,5 \leqslant Y \leqslant 80,5)$.

C. Probabilités conditionnelles

Un garage de cette enseigne possède deux ateliers. Les véhicules qu'il répare sont traités, soit par l'atelier 1, soit par l'atelier 2.
L'atelier 1 répare 60 % des véhicules et le reste est réparé par l'atelier 2.
Suite aux réparations, 1 % des véhicules provenant de l'atelier 1 présentent un défaut de réparation et 2,5 % de ceux provenant de l'atelier 2 présentent un défaut de réparation.
On prélève au hasard un véhicule parmi ceux ayant été réparés dans ce garage.
On définit les évènements suivants :
A : « le véhicule provient de l'atelier 1 » ;
B : « le véhicule provient de l'atelier 2 » ;
D : « le véhicule présente un défaut de réparation ».

1. Déduire des informations précédentes $P(A)$, $P(B)$, $P_A(D)$ et $P_B(D)$.
   (On rappelle que $P_A(D)$ est la probabilité de l'évènement D sachant que l'évènement A est réalisé.)
2. Calculer $P(A \cap D)$ et $p(B \cap D)$.
   Calculer la probabilité qu'un véhicule présente un défaut de réparation.

D. Intervalle de confiance

Cette grande enseigne de garages automobile organise une enquête de satisfaction auprès de ses clients. Elle voudrait estimer la proportion inconnue p de clients satisfaits.
Pour cela, elle interroge au hasard un échantillon de 100 clients parmi l'ensemble de sa clientèle. Cette clientèle est suffisamment importante pour considérer que cet échantillon résulte d'un tirage avec remise.
Soit F la variable aléatoire qui à tout échantillon ainsi prélevé, associe la fréquence, dans cet échantillon, des clients satisfaits. On suppose que F suit la loi normale de moyenne p inconnue et d'écart type $\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{100}}$.
On fournit la formule suivante :

Intervalle de confiance d'une proportion à 95 %
$\left[f - 1,96\sqrt{\dfrac{f(1-f)}{n}}\ ;\ f + 1,96\sqrt{\dfrac{f(1-f)}{n}}\right]$

Pour l'échantillon prélevé, on constate que 87 clients sont satisfaits.

1. Donner une estimation ponctuelle f de la proportion inconnue p.
2. Déterminer un intervalle de confiance centré sur f de la proportion p avec le coefficient de confiance 95 %. Arrondir les bornes de l'intervalle à 10^{-3}.