BTS Groupement D 13 mai 2019

Durée : 2 heures

EXERCICE 1 **10 points**

Staphylococcus Aurerus (SA), plus communément appelé staphylocoque doré, est une bactérie responsable de nombreuses intoxications alimentaires. Elle est naturellement présente chez l'homme. Déposée sur un aliment et sous certaines conditions (comme notamment la présence suffisante de nutriments), elle se développe très fortement et produit des toxines. Ces toxines, une fois ingérées, sont responsables de troubles alimentaires, qui peuvent aller, dans certains cas extrêmes, jusqu'à la mort de la personne touchée.

Partie A : Équation différentielle

1. Déterminer les solutions sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ de l'équation différentielle

$$20y' - 20{,}8y = 0$$

où y est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

2. En déduire la fonction f solution de cette équation différentielle qui vérifie $f(0) = 10$.

Partie B : Modèle exponentiel

On souhaite étudier la croissance de bactéries *SA* à température ambiante sur un échantillon de mix (le mix est un mélange contenant en grande partie du lait permettant la fabrication de glaces à l'italienne).

On suppose que 10 bactéries sont déposées en même temps sur 1 g de mix. Voici les relevés du nombre de bactéries *SA* heure par heure, mesuré à partir du moment où les bactéries sont déposées sur le mix.

Heure (t_i)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre de bactéries *SA* (N_i)	10	27	78	232	650	1 800	5 100	14 100	39 000

1. On effectue un changement de variable de type logarithmique : $z_i = \ln(N_i)$.
Compléter le tableau donné en **annexe 1 à rendre avec la copie**. On arrondira les valeurs au centième.
2. À l'aide de la calculatrice, déterminer une équation de la droite d'ajustement Δ du nuage de points $(t_i\ ;\ z_i)$ par la méthode des moindres carrés sous la forme $z = at + b$. On arrondira les valeurs de a et b au millième.
3. En utilisant la question précédente, déterminer une expression de la fonction N qui modélise le nombre de bactéries *SA* à l'instant t exprimé en heures.

Dans la suite, on prendra $N(t) = 10\mathrm{e}^{1{,}04t}$ pour tout réel t de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$. On admet que la fonction N modélise le nombre de bactéries *SA* relevées sur le mix en fonction du temps.

4. Une population donnée de bactéries voit son effectif doubler au bout d'un temps appelé « temps de génération bactérienne » et noté G.
Estimer cette durée G en minutes.

5. Calculer la limite de N en $+\infty$.

Partie C : Modèle logistique

Dans cette partie, on étudie et on utilise un deuxième modèle, appelé modèle logistique et défini par une fonction M, qui, à tout instant t exprimé en heures, associe le nombre $M(t)$ de bactéries de *SA* à l'instant t donné par :

$$M(t) = \frac{13\,500}{1350 \times \mathrm{e}^{-1,04t} + 1}.$$

1. La dérivée de M est fournie par un logiciel de calcul formel :

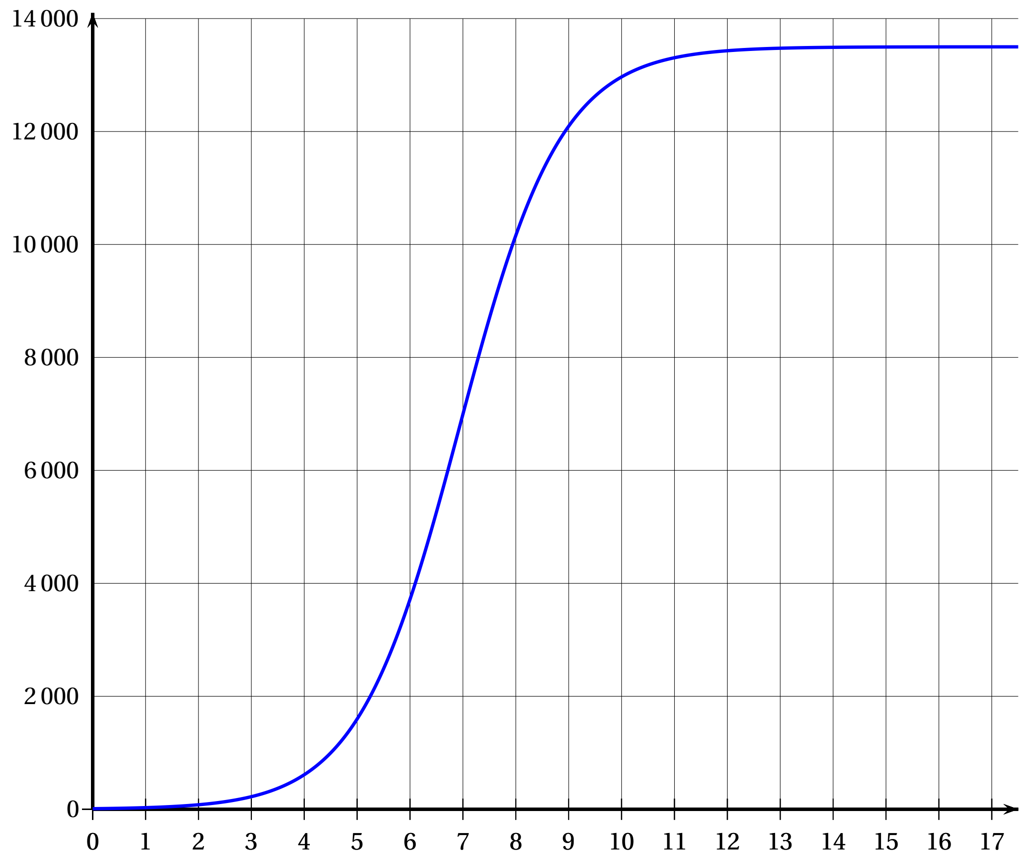
$$M'(t) = \frac{13\,500 \times 1\,350 \times 1,04 \times \mathrm{e}^{-1,04t}}{\left(1\,350 \times \mathrm{e}^{-1,04t} + 1\right)^2}.$$

Étudier les variations de la fonction M sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

2. **a.** Déterminer la limite de M en $+\infty$.

b. L'un des modèles de croissance de bactéries *SA* (exponentiel ou logistique) est plus vraisemblable.
Lequel ?

La courbe représentative de la fonction M est présentée ci-dessous.



3. Déterminer le temps nécessaire pour que le nombre de bactéries SA dépasse 10 000. Arrondir à l'heure.

   Pour tout instant t exprimé en heures, le réel $M'(t)$ est appelé vitesse de prolifération bactérienne.

4. Dans cette question, on s'intéresse à l'instant où la vitesse de prolifération bactérienne est maximale.

   Parmi les quatre propositions suivantes, une seule d'entre elles correspond à une valeur approchée de cet instant.

   Laquelle ? Pourquoi ?

   a. $t = 4$ h **b.** $t = 7$ h **c.** $t = 9$ h **d.** $t = 16$ h

Exercice 2 **10 points**

Dans cet exercice, les probabilités seront données en valeurs décimales à 10^{-4} près.

Les parties A, B et C peuvent se traiter de façon indépendante.

On s'intéresse à la production industrielle de bouteilles d'eau minérale naturelle ou d'eau de source.
On s'intéresse à la qualité de l'eau contenue dans les bouteilles produites : plusieurs paramètres sont pris en compte, notamment microbiologiques (présence de bactéries, de coliformes, de germes, ...) et physico-chimiques (présence d'arsenic, de nickel. ...).

Partie A : Eau de source et eau minérale naturelle

En 2017, des analyses identiques ont été menées sur la qualité de l'eau de 126 000 bouteilles produites. Ainsi 37 000 bouteilles d'eau minérale naturelle et 89 000 bouteilles d'eau de source ont été analysées.
Parmi les analyses portant sur les bouteilles d'eau minérale naturelle, on constate que 0,12 % des analyses révèlent une eau non conforme. Parmi celles portant sur les bouteilles d'eau de source, on constate que 0,08 % des analyses révèlent une eau non conforme.
On choisit le résultat d'une analyse d'une bouteille d'eau au hasard parmi toutes celles qui ont été réalisées.
Dans la suite, on notera les évènements suivants :

M : « L'analyse porte sur une bouteille d'eau minérale naturelle » ;

S : « L'analyse porte sur une bouteille d'eau de source » ;

N : « L'analyse révèle une eau non conforme ».

1. Calculer les probabilités $P(M)$ et $P(S)$.

Pour les deux questions suivantes, on pourra s'aider d'un arbre pondéré.

2. Calculer la probabilité de choisir une analyse qui révèle une eau non conforme.
3. Calculer la probabilité qu'une analyse porte sur une bouteille d'eau minérale naturelle, sachant qu'elle révèle une eau non conforme.

Partie B : Étude du nitrate présent dans l'eau

Une entreprise produisant des bouteilles d'eau minérale naturelle affirme que la moyenne du taux de nitrate de sa production est égale à 4,5 mg/L. L'objectif de cette partie est de juger de la véracité de cette affirmation.
On note μ la moyenne, mesurée en mg/L, du taux de nitrate de la production, et σ son écart type.
On réalise 600 prélèvements dans la production. Les résultats sont les suivants :

Taux de nitrate (en mg/L)	[4,2 : 4,3[	[4,3 : 4,4[	[4,4 : 4,5[	[4,5 : 4,6[	[4,6 : 4,7[	[4,7 : 4,8[
Nombre de prélèvements	5	57	181	233	110	14

1. En faisant l'hypothèse que les valeurs observées sont respectivement celles du centre de chaque classe, déterminer, à l'aide de la calculatrice, la moyenne $\overline{x}$ et l'écart type s' de cet échantillon. On donnera les résultats à 10^{-4} près.
2. Vérifier que $s = 0{,}0976$ est un estimateur de l'écart type σ.
3. On souhaite réaliser le test bilatéral suivant, au seuil de 5 % :

$$H_0 : \mu = 4{,}5 \quad \text{contre} \quad H_1 : \mu \neq 4{,}5.$$

Soit $\overline{X}$ la variable aléatoire qui à tout échantillon de 600 prélèvements associe la moyenne du taux de nitrate de ces prélèvements. On considère que $\overline{X}$ suit la loi normale d'espérance μ et d'écart type $\dfrac{\sigma}{600}$.

Dans la suite, on remplace σ par son estimateur $s = 0{,}0976$. Sous l'hypothèse H_0, $\overline{X}$ suit donc approximativement la loi normale d'espérance 4,5 et d'écart type 0,004.

a. On a présenté en annexe 2 les représentations de trois densités de probabilité.
Laquelle est associée à la variable aléatoire $\overline{X}$? Justifier la réponse.

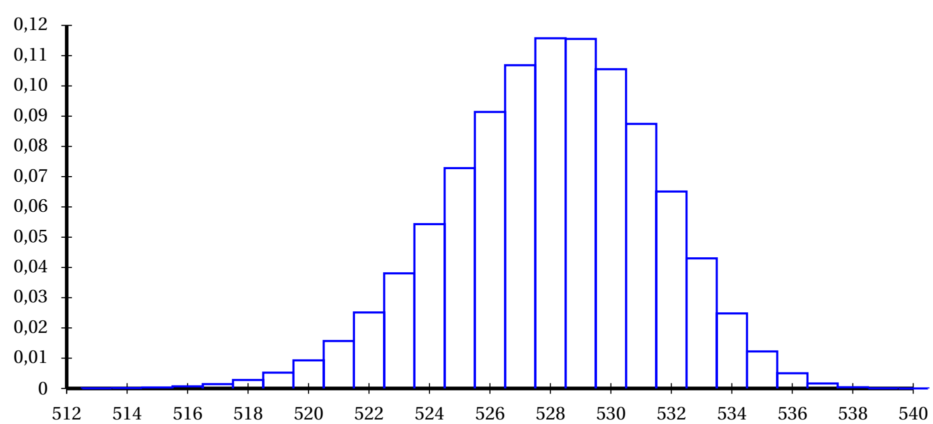
b. Donner un nombre réel a à 10^{-3} près vérifiant : $P(4{,}5 - a \leqslant \overline{X} \leqslant 4{,}5 + a) \approx 0{,}95$.

c. Énoncer la règle de décision de ce test.

d. D'après les résultats obtenus dans l'échantillon donné, peut-on accepter l'hypothèse $\mu = 4{,}5$?

Partie C : Distribution

L'entreprise précédente fournit une grande surface en eau minérale. Chaque semaine, 540 bouteilles contenant un litre d'eau minérale sont réceptionnées par la grande surface.
Une bouteille d'eau minérale d'un litre est de très bonne qualité si elle contient moins de 4,7 mg de nitrate.
On prélève au hasard un lot de 540 bouteilles dans la production, jugée suffisamment importante pour assimiler ce choix à un tirage avec remise. On note alors Y la variable aléatoire qui, à chaque lot de 540 bouteilles, associe le nombre de bouteilles de très bonne qualité du lot.
On admet que Y suit une loi binomiale dont une représentation graphique est fournie ci-dessous :



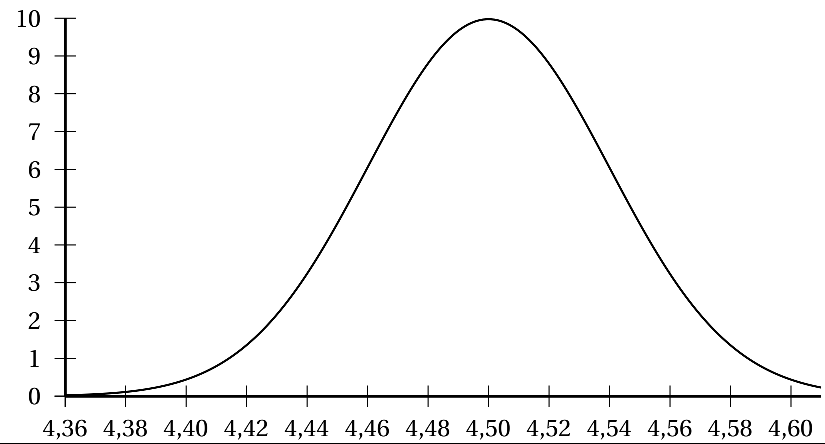
1. Au vu de ce graphique, un biologiste estime que la probabilité qu'un lot de 540 bouteilles prélevé au hasard dans la production contienne moins de 520 bouteilles de très bonne qualité est environ égal à 0,005. A-t-il raison ? Justifier la réponse.
2. On admet que le nombre moyen de bouteilles de très bonne qualité sur l'ensemble des échantillons de 540 bouteilles est égal à 528.

   Donner alors les paramètres n et p de la loi binomiale suivie par la variable aléatoire Y. On arrondira p à 10^{-3}.

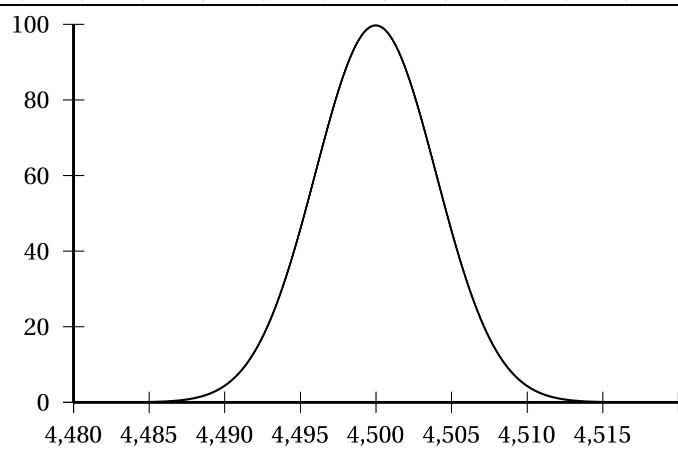
Annexe 1 : Exercice 1 - question B.1 - À rendre avec la copie

Heure (t_i)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Quantité de SA (N_i)	10	27	78	232	650	1 800	5 100	14 100	39 000
$z_i = \ln(N_i)$									

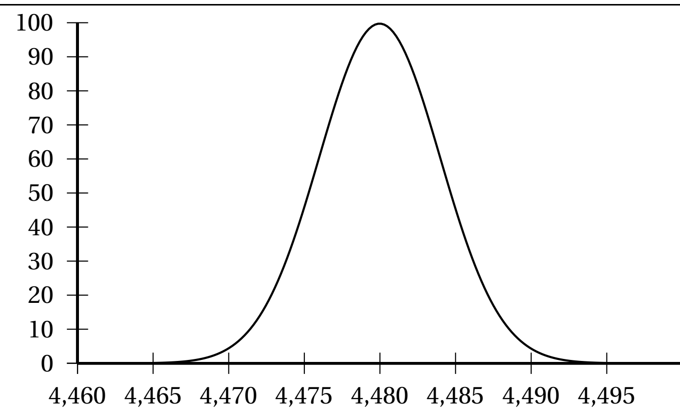
Annexe 2 : Exercice 2 - question B. 3. a.



Densité n° 1



Densité n° 2



Densité n° 3