BTS Groupement D[1] – 16 mai 2022

Métropole – Antilles–Guyane – Polynésie

Durée : 2 heures

EXERCICE 1 **10 points**

On s'intéresse dans cet exercice à l'évolution, dans un pays de 60 millions d'habitants, du nombre de personnes équipées d'un certain implant médical. On exploitera deux modèles distincts.

Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante

Partie A

Le tableau ci-dessous indique le nombre de personnes de ce pays équipées de l'implant médical depuis 2013.

Année	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
Rang de l'année k_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre de personnes N_i (en milliers) équipées de l'implant	56,25	58,1	60,5	63	65,8	68,7	72	75,5	79,3

On décide de modéliser cette évolution par une fonction exponentielle et pour cela on effectue le changement de variable $y = \ln(N - 30)$.

1. Compléter le tableau donné en **annexe à rendre avec la copie**. On arrondira les valeurs au millième. 1
2. **a.** À l'aide de la calculatrice, déterminer une équation de la droite d'ajustement du nuage de points $M_i\left(k_i,\ y_i\right)$ par la méthode des moindres carrés.

   On écrira cette équation sous la forme $y = ak + b$ où a et b sont des coefficients que l'on arrondira au centième.

   b. En utilisant cette équation de droite, déduire que le nombre de personnes (en milliers) équipées de l'implant médical dans ce pays, en fonction du rang k, peut être modélisé par la fonction N d'expression :

$$N(k) = 30 + 26,05\mathrm{e}^{0,08k}.$$

3. On formule l'hypothèse que le modèle proposé reste valide plusieurs années encore.

1. Analyses de biologie médicale, Bio analyses et contrôles, Biotechnologies, Europlastics et composites, Bioqualité

a. Quel devrait être le nombre de personnes, au millier près, équipées de l'implant médical dans ce pays en 2026 ?

b. Si on suppose que le nombre d'habitants du pays reste stable sur le long terme, le modèle étudié reste-t-il valide sur le long terme ? Justifier la réponse.

Partie B

1. Dans cette question, on considère la fonction g définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ qui vérifie $g(0) = 8$ et qui est solution de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$:

$$(E) : \quad y' + 0,05y = 0,05$$

a. Résoudre sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ l'équation différentielle (E_0) : $\quad y' + 0,05y = 0$.

b. Déterminer une solution constante de l'équation différentielle (E).

c. Résoudre sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ l'équation différentielle (E).

d. On rappelle que $g(0) = 8$.
En déduire une expression de la fonction g sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(t) = \frac{450}{1 + 7\mathrm{e}^{-0,05t}}$$

On admet que cette fonction permet de modéliser l'évolution du nombre de personnes équipées de l'implant médical dans ce pays.
Plus précisément, $f(t)$ représente le nombre de personnes, exprimé en milliers, équipées de l'implant médical dans ce pays en fonction du temps t mesuré en années depuis 2013.
Par exemple, $f(1)$ représente le nombre de personnes de ce pays équipées de l'implant médical en 2014.

2. Déterminer, selon ce modèle, combien de personnes, au millier près, seront équipées de l'implant médical en 2026.

3. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

4. À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a obtenu l'expression suivante :

$$f'(t) = \frac{315\mathrm{e}^{-0,05t}}{2\left(1 + 7\mathrm{e}^{-0,05t}\right)^2}.$$

En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.

5. Déterminer à partir de quelle année le nombre de personnes de ce pays équipées de cet implant médical dépassera 120 000, c'est-à-dire 120 milliers. On expliquera la méthode employée.

Exercice 2 **10 points**

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes

Dans une usine, une machine à embouteiller est alimentée par un réservoir d'eau et par une file d'entrée qui permet l'approvisionnement en bouteilles vides.

Partie A - Défaut d'approvisionnement

On considère qu'il y a un défaut d'approvisionnement lorsqu'au moins un des deux cas suivants est réalisé :

— la file d'entrée des bouteilles est vide ;

— le réservoir est vide.

On choisit au hasard un jour d'activité de l'entreprise dans l'année. On note :

— A l'évènement : « la file d'entrée des bouteilles est vide au moins une fois dans la journée » ;

— B l'évènement : « le réservoir est vide au moins une fois dans la journée ».

On admet que les évènements A et B sont indépendants.
Une étude statistique permet de dire que les probabilités des évènements A et B sont respectivement données par $P(A) = 0,03$ et $P(B) = 0,02$.
Chaque phrase du tableau de gauche est associée à une unique information correspondante dans le tableau de droite. Pour chacune des quatre réponses, écrire sur la copie le numéro de la phrase avec la lettre qui correspond à l'information associée.
Aucune justification n'est demandée.

1	La probabilité de l'évènement : « La file d'entrée ne se vide pas dans la journée. »
2	L'évènement : « La file d'entrée est vide au moins une fois dans la journée mais pas le réservoir. »
3	La probabilité de l'évènement : « La file d'entrée et le réservoir ont été tous les deux vides au moins une fois au cours de la journée. »
4	La probabilité de l'évènement : « La machine a connu un défaut d'approvisionnement dans la journée. »

A	$\overline{A} \cap B$
B	0,05
C	$A \cap \overline{B}$
D	0,049 4
E	0,97
F	0,000 6

Partie B - Pannes de la machine à embouteiller sur une durée de 200 jours

1. Lorsque la machine tombe en panne, elle est immobilisée pour le reste de la journée et réparée pour le lendemain. La probabilité qu'elle tombe en panne un jour quelconque est égale à $0,025$.

On note X la variable aléatoire qui, à toute période de 200 jours consécutifs choisie au hasard, associe le nombre de jours où la machine est tombée en panne.

On considère que les jours où les pannes surviennent sont indépendants les uns des autres.

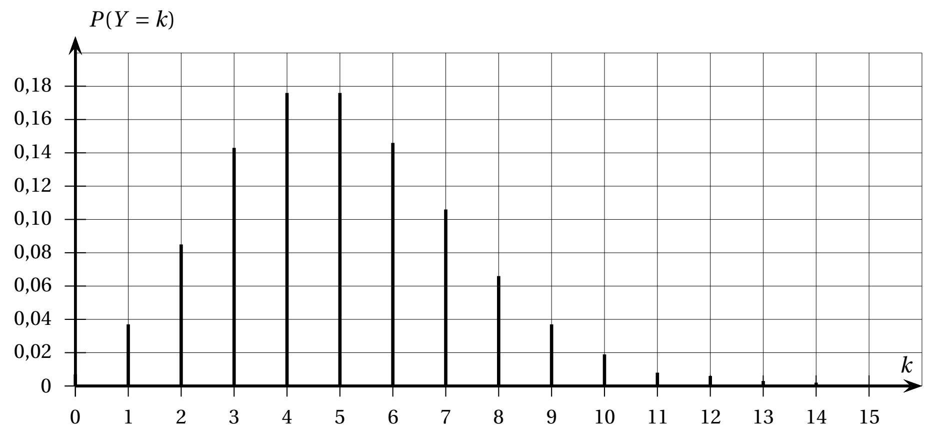
Donner, sans justifier, la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X. Préciser ses paramètres.

2. On admet que la loi de la variable aléatoire X peut être approchée par une loi de Poisson de paramètre λ. Soit Y une variable aléatoire qui suit cette loi de Poisson.

a. Justifier que $\lambda = 5$.

b. Donner la valeur arrondie à 10^{-3} de la probabilité $P(Y \leqslant 10)$.

c. On a représenté ci-dessous les valeurs de $P(Y = k)$ en fonction des premières valeurs de k :



Cette représentation graphique suggère que la probabilité $P(Y = 15)$ est égale à 0.

On admet que pour tout entier $k \geqslant 1$, on a :

$$P(Y = k) = \frac{5^k \mathrm{e}^{-5}}{1 \times 2 \times \ldots \times k}$$

La conjecture « $P(Y = 15)$ est égale à 0 » est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

Partie C - Qualité de l'embouteillement

Un laboratoire analyse la qualité de l'embouteillement en sortie de machine.

La machine est correctement réglée quand une bouteille remplie contient un volume d'eau dont l'arrondi au centilitre est 75 cL.

On souhaite tester l'hypothèse « La machine est correctement réglée » à l'aide d'un test bilatéral au seuil de confiance de 95 %.

On note :

- m la quantité moyenne d'eau en centilitres dans une bouteille remplie par la machine ;
- s l' écart type correspondant.

On réalise une mesure du volume d'eau arrondi au centilitre pour un échantillon de 100 bouteilles remplies par la machine. Les résultats obtenus figurent dans le tableau ci-dessous :

Quantité d'eau contenue (cL)	73	74	75	76	77
Nombre de bouteilles	17	20	43	13	7

1. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, la moyenne $\overline{x}$ et l'écart type σ de cet échantillon. On donnera la valeur arrondie de l'écart type à 10^{-2}.

2. On souhaite réaliser le test bilatéral suivant au seuil de confiance de 95 % :

$$H_0 : « \, m = 75 \, » \text{ et } \quad H_1 : « \, m \neq 75 \, ».$$

On note $\overline{Z}$ la variable aléatoire qui à tout échantillon de 100 bouteilles remplies par la machine associe la moyenne du volume d'eau contenue dans les bouteilles, mesuré en centilitres. On suppose que la variable aléatoire $\overline{Z}$ suit la loi normale d'espérance m et d'écart type s.

Dans la suite, on remplace l'écart type s des volumes d'eau contenue après remplissage par la machine par son estimateur 0,11.

Sous l'hypothèse H_0, $\overline{Z}$ suit donc la loi normale d'espérance 75 et d'écart type 0, 11.

a. Déterminer un nombre réel h vérifiant $P(7S - h \leqslant \overline{Z} \leqslant 75 + h) \approx 0,95$ à 10^{-2} près.

b. Énoncer la règle de décision du test.

c. D'après les résultats de l'échantillon donné, peut-on accepter l'hypothèse H_0 : « $m = 75$ » ?

ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE

Année	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
Rang de l'année k_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre de personnes N_i (en milliers) équipées de l'implant	56,25	58,1	60,5	63	65,8	68,7	72	75,5	79,3
$\ln(N_i - 30)$									