Brevet de technicien supérieur
Métropole session 2016 - groupement A1

Spécialités :

— Contrôle industriel et régulation automatique
— Électrotechnique
— Génie optique (deux options)
— Techniques physiques pour l'industrie et le laboratoire

Exercice 1 **7 points**

Une chaine de traitement de surface est constituée de plusieurs cuves dont l'une est destinée à réaliser le dégraissage de pièces usinées par immersion dans une solution aqueuse (eau et additif détergent).
Pour que le dégraissage s'effectue correctement il faut que la température du bain soit maintenue constante entre 75 °C et 85 °C.
Un technicien doit réaliser la régulation en température de cette cuve. Pour cela il propose l'installation d'un élément chauffant dont la puissance doit permettre de compenser les pertes thermiques et de réaliser la montée en température en un temps déterminé.

Les caractéristiques du système thermique sont les suivantes :
R : résistance thermique caractérisant les pertes d'énergie thermique. $R = 0,115$°C.W^{-1}.
k : constante liée à la capacité du système à emmagasiner l'énergie thermique. $k = 34,8$ J.°C^{-1}.
$f(t)$: puissance, en watt, apportée par l'élément chauffant à l'instant t (en seconde).
θ_A : température de l'air ambiant. $\theta_A = 20$°C.
$\theta_{S(t)}$: température en degré Celsius de la solution aqueuse contenue dans la cuve à l'instant t.
$\theta(t) = \theta_{S(t)} - \theta_A$: écart en degré Celsius entre la température de la solution aqueuse contenue dans la cuve et celle de l'air ambiant à l'instant t.
Une modélisation du système permet d'établir que, pour tout $t \geqslant 0$, la fonction θ vérifie l'égalité :

$$\theta(t) + kR\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}(t) = Rf(t) \qquad (1)$$

On note $T : p \longmapsto T(p)$ et $F : p \longmapsto F(p)$ les transformées de Laplace respectives des fonctions $\theta : t \longmapsto \theta(t)$ et $f : t \longmapsto f(t)$.
On rappelle quelques résultats concernant la transformation de Laplace, formulés en notant

— U la fonction échelon unité définie par : (si $t < 0$, $U(t) = 0$) et (si $t \geqslant 0$, $U(t) = 1$),
— g une fonction ayant une transformée de Laplace G.

Fonction	**Transformée de Laplace**
$t \longmapsto \mathrm{e}^{-at}U(t)$ avec a constante réelle	$p \longmapsto \dfrac{1}{p+a}$
$t \longmapsto g(t-a)U(t-a)$ avec a constante réelle	$p \longmapsto G(p)\mathrm{e}^{-ap}$
$t \longmapsto g(t)\mathrm{e}^{-at}U(t)$ avec a constante réelle	$p \longmapsto G(p+a)$
$t \longmapsto g'(t)U(t)$	$p \longmapsto pG(p) - g\left(0^+\right)$

1. On considère qu'à l'instant $t = 0$, la température de la solution aqueuse contenue dans la cuve est égale à celle de l'air ambiant.
En appliquant la transformation de Laplace à l'égalité (1) montrer que :

$$T(p) = \frac{0,115}{4,002p+1}F(p).$$

2. On applique une puissance échelon de 522 watts. On a donc : $f(t) = 522U(t)$.

a. Donner l'expression de $F(p)$.

b. En déduire l'expression de $T(p)$.

Par la suite, pour simplifier, on prendra $\boldsymbol{T(p) = \dfrac{60}{p(4p+1)}}$, ce qui s'écrit encore :

$$T(p) = \frac{15}{p(p+0,25)}.$$

3. a. Montrer que : $T(p) = \dfrac{60}{p} - \dfrac{60}{p+0,25}$.

b. En déduire que pour tout $t \geqslant 0 : \theta(t) = 60\left(1 - \mathrm{e}^{-0,25t}\right)$.

4. a. Déterminer la limite de $\theta(t)$ quand t tend vers $+\infty$. Justifier.
Cette limite est appelée par la suite « valeur finale de θ ».

b. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de la fonction θ ?

c. Calculer $\theta'(t)$ pour $t \geqslant 0$, puis étudier les variations de la fonction θ.

d. Représenter la fonction θ dans le repère donné sur le document réponse.

5. Le technicien estime que, lorsque $\theta(t)$ a atteint 95 % de sa valeur finale, la température du bain $\theta_S(t)$ peut être considérée comme constante.

a. Déterminer le temps nécessaire pour que $\theta(t)$ atteigne 95 % de sa valeur finale. Expliquer la démarche suivie.

b. Quelle est la température constante autour de laquelle se stabilise la température du bain ? Le dégraissage sera-t-il réalisé conformément aux conditions décrites dans le préambule ?

Exercice 2 **7 points**

Commun à tous les candidats

On rappelle que le développement en série de Fourier d'une fonction f périodique de période T est

$$S(t) = a_0 + \sum_{n\geqslant 1}^{+\infty} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right).$$

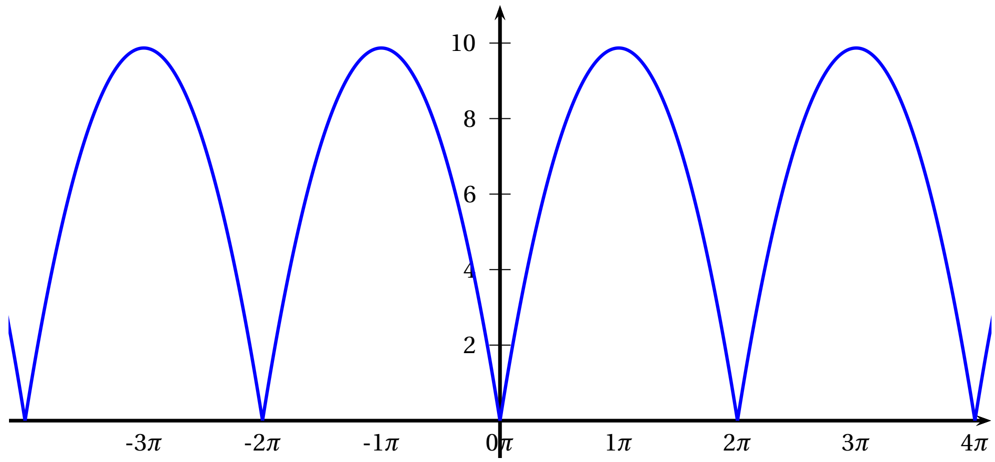
avec $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, $a_0 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t$ et, pour tout entier $n \geqslant 1$ et toute constante réelle α :

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^{a+T} f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad b_n = \frac{2}{T}\int_0^{a+T} f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t.$$

Les trois parties de l'exercice sont indépendantes

Partie A

On donne ci-dessous la représentation graphique C d'une fonction f définie pour tout réel x, paire, périodique de période T et telle que pour tout $x \in [0\,;\,2\pi]$: $f(x) = x(2\pi - x)$.



On souhaite déterminer les coefficients a_0, a_n et b_n, avec $n \geqslant 1$, de la série de Fourier associée à cette fonction f.

1. Déterminer T puis calculer ω.

2. Calculer le coefficient a_0.

3. Que valent les coefficients a_n et b_n pour $n \geqslant 1$?
On pourra utiliser les résultats ci-dessous obtenus à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

integrate(x*(2pi-x)*cos(n*x),x,0,2*pi) $= \dfrac{-2n\pi\cos(n*2\pi)+2\sin(n*2\pi)}{n^3} - \dfrac{2\pi}{n^2}$
integrate(x*(2pi-x)*cos(n*x),x,0,2*pi) $= \dfrac{n^2\pi^2\sin(n\pi)+2\sin(n\pi)}{n^3} - \dfrac{2\pi}{n^2}$

On simplifiera le plus possible les réponses.

Partie B

La tension exprimée en volt (V) aux bornes d'une bobine de moteur pas à pas dépend du temps t exprimé en seconde. Elle est modélisée par la fonction u impaire, périodique de période $T = 6$, telle que :

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leqslant t < 1 \\ 2 & \text{si} \quad 1 \leqslant t < 2 \\ 0 & \text{si} \quad 2 \leqslant t \leqslant 3 \end{cases}.$$

1. Dans un repère orthogonal tracer la courbe C représentative de u sur l'intervalle $[-6\,;\,6]$.

2. Déterminer la valeur moyenne U_{moy} de cette tension u sur un intervalle de longueur T.

3. La tension efficace U_{eff} vérifie : $U_{\text{eff}}^2 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T u^2(t)\,\mathrm{d}t$.
Calculer la valeur exacte de U_{eff} puis donner sa valeur arrondie à 10^{-2} près.

Partie C

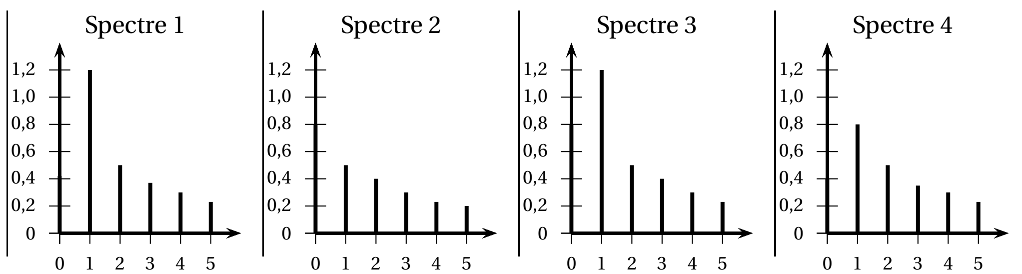
On s'intéresse à une fonction f définie pour tout réel t, périodique de période 2π et développable en série de Fourier. On donne son développement :

$$f(t) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n \geqslant 1} \left[\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} \cos(nt) + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nt) \right] \text{ avec } t \text{ réel quelconque.}$$

1. Quelle est la valeur du coefficient a_0 du développement en série de Fourier de f ?
Exprimer en fonction de n les coefficients a_n et b_n pour n entier supérieur ou égal à 1.

2. Soit $S_N(t) = \dfrac{\pi}{4} + \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \left[\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} \cos(nt) + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nt) \right]$ la somme partielle de rang N (N entier supérieur ou égal à 1) de la série de Fourier.
Écrire $S_2(t)$. On cherchera à simplifier l'expression obtenue.

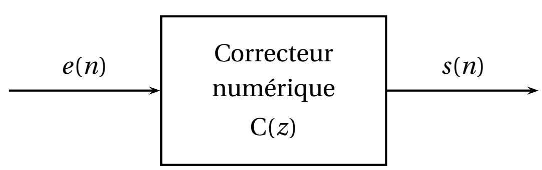
3. Parmi les spectres d'amplitude ci-dessous quel est celui associé à f ? Expliquer.
On rappelle que $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ pour $n \geqslant 1$ et $A_0 = |a_0|$.



Exercice 3 **6 points**

Dans un véhicule comportant un dispositif de régulation de la vitesse, le volet d'admission d'air du moteur thermique est contrôlé par le calculateur du véhicule. Les différentes informations issues des capteurs de position du volet d'admission d'air sont échantillonnées et numérisées par un convertisseur analogique-numérique (CAN) avant d'être traitées par un correcteur numérique.
Dans cet exercice on étudie la stabilité et la rapidité du correcteur numérique.
On note

- $e(n)$ et $s(n)$: les signaux causaux d'entrée et de sortie du correcteur numérique.
- $\mathrm{E}(z)$ et $\mathrm{S}(z)$: les transformées en Z de $e(n)$ et $s(n)$.
- $\mathrm{C}(z)$: la fonction de transfert du correcteur. On admet que $\mathrm{C}(z) = \dfrac{\mathrm{S}(z)}{\mathrm{E}(z)} = \dfrac{1,2z - 1,1}{z - 0,5}$.
- $\mathrm{T_E}$: la période d'échantillonnage. $\mathrm{T_E}$ est égale à 10 microsecondes (ms), soit à 10^{-5} s.



On rappelle quelques résultats concernant la transformée en Z :

Signal causal	**Transformée en Z**
$n \longmapsto n$	$z \longmapsto \dfrac{z}{(z-1)^2}$
$n \longmapsto a^n$ avec a réel non nul.	$z \longmapsto \dfrac{z}{z-a}$
Propriétés	
$n \longmapsto x(n)$	$X(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x(n)z^{-n}$
$y : n \longmapsto a^n x(n)$ avec a réel non nul	$Y(z) = X\left(\dfrac{z}{a}\right)$
$y : n \longmapsto x(n-n_0)$ avec n_0 entier naturel	$Y(z) = z^{-n_0}X(z)$
$y : n \longmapsto x(n+1)$	$Y(z) = z[X(z) - x(0)]$

1. Calculer, en hertz, la fréquence d'échantillonnage.

2. Dans cette question, le signal causal $e(n)$ est l'impulsion unité. Il est donc défini par :

$$e(0) = 1 \quad \text{et} \quad e(n) = 0 \quad \text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul.}$$

a. Vérifier que : $S(z) = 2,2 - \dfrac{z}{z-0,5}$.

b. En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de $s(n)$.
Préciser la valeur de $s(0)$ et celle de $s(n)$ pour n non nul.

c. Le système est dit stable si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} s(n) = 0$. Ce système est-il stable ? Justifier.

3. Dans cette question, le signal causal $e(n)$ est quelconque.

a. Montrer que : $\left(1-0,5z^{-1}\right)S(z) = \left(1,2-1,1z^{-1}\right)\mathrm{E}(z)$.

b. En déduire que la relation de récurrence du correcteur est :

$$s(n) = 1,2e(n) - 1,1e(n-1) + 0,5s(n-1).$$

4. Dans cette question, le signal causal $e(n)$ est le signal échelon unité :

$$e(n) = 0 \text{ si } n < 0 \quad \text{et } e(n) = 1 \text{ sinon.}$$

On prendra $s(0) = 0$.

a. Exprimer $s(n)$ en fonction de $s(n-1)$ pour $n \geqslant 1$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	$s(n)$	0										

b. Quelle formule peut-on entrer dans la cellule C2 du tableur pour obtenir, en la recopiant vers la droite, les valeurs successives de $s(n)$?

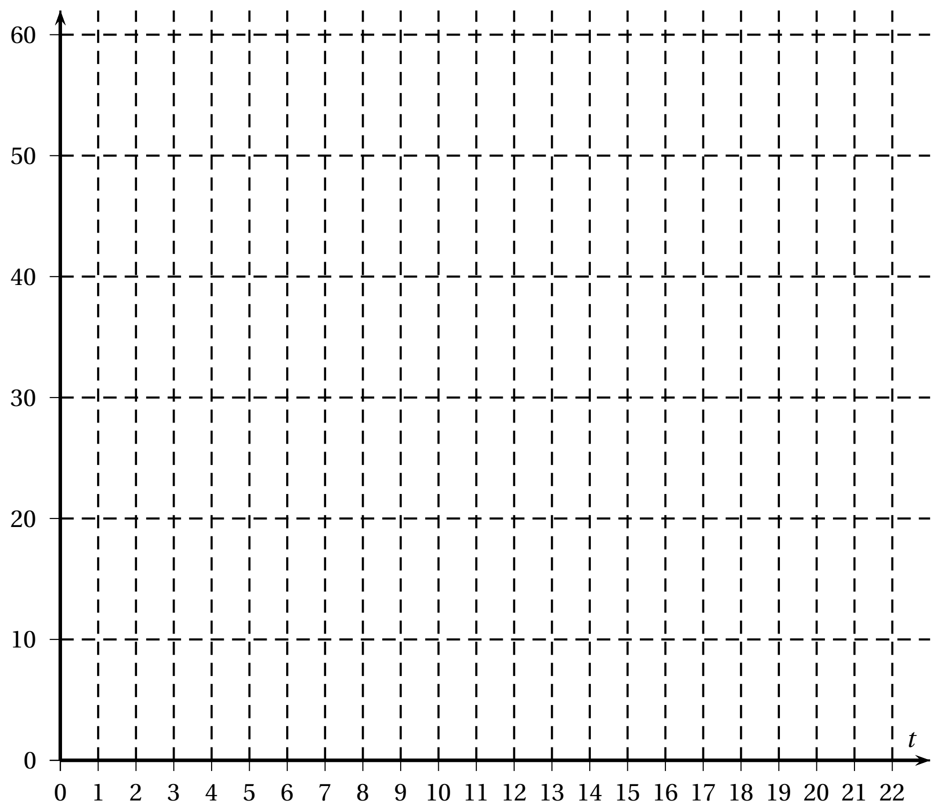
c. Compléter le tableau donné dans le document réponse. On arrondira au millième les valeurs demandées.

d. À l'aide de ce tableau, conjecturer le sens de variation de $s(n)$ et la valeur de sa limite L quand n tend vers $+\infty$.

e. Le correcteur est dit rapide si le temps nécessaire pour atteindre 99 % de la valeur limite de $s(n)$ est inférieur à 100 ms. Le correcteur est-il rapide ? Expliquer.

DOCUMENT RÉPONSE (à rendre obligatoirement avec la copie)

EXERCICE 1 - Question 4 d.



EXERCICE 3 - Question 4 c.

Tableau à compléter en arrondissant au millième.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$s(n)$	0		0,15		0,188	0,194			0,199	0,200	0,200