

Brevet de technicien supérieur

Groupement A1 session 2004

Pour les spécialités **Contrôle industriel et régulation automatique, électronique, Techniques physiques pour l'industrie et le laboratoire**

Exercice 1

8 points

Dans tout cet exercice, le nombre n est un entier relatif.
La suite $n \mapsto e(n)$ représente l'échelon discrétisé causal défini par :

$$\begin{cases} e(n) = 0 & \text{pour } n < 0 \\ e(n) = 1 & \text{pour } n \geq 0 \end{cases}$$

On considère un filtre numérique dans lequel le signal d'entrée est $n \mapsto e(n)$ et le signal de sortie est un signal discret causal noté $n \mapsto x(n)$.

Ce filtre est régi par l'équation récurrente :

$$x(n) - 2x(n-1) = e(n) \quad (E)$$

Partie 1

Dans cette partie, on résout l'équation récurrente (E) sans utilisation de la transformation en Z .

1. a. Justifier que $x(0) = 1$.
b. Calculer $x(1)$, $x(2)$ et $x(3)$.
2. Pour tout entier naturel n l'équation (E) s'écrit :

$$x(n) - 2x(n-1) = 1 \quad (E)$$

- a. On considère la suite y définie pour tout entier naturel n par :

$$y(n) = x(n) + 1$$

Montrer que la suite y est une suite géométrique de raison 2.

Donner l'expression de $y(n)$ en fonction de l'entier naturel n .

- b. En déduire, pour tout entier naturel n , l'expression de $x(n)$. Vérifier que l'on retrouve les mêmes valeurs de $x(0)$, $x(1)$, $x(2)$ et $x(3)$ qu'à l'équation 1.

Partie 2

Dans cette partie on résout l'équation récurrente (E) en utilisant la transformation en Z .

1. On rappelle que $x(0) = 1$.
On se place dans le cas où $n \geq 1$ et on admet que le signal $n \mapsto x(n)$, solution de l'équation récurrente (E), a une transformation en Z notée $(Zx)(z)$.
a. Montrer que pour tout z différent de 0, de 1 et de 2 on a :

$$(Zx)(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-2)}$$

b. Montrer que pour tout z différent de 0, de 1 et de 2 on a :

$$\frac{(Zx)(z)}{z} = \frac{-1}{z-1} + \frac{2}{z-2}$$

c. En déduire par lecture inverse du dictionnaire d'images, le signal de sortie $n \mapsto x(n)$ pour $n \geq 1$.

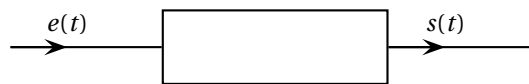
2. Représenter dans un repère orthogonal, pour les nombres entiers n tels que $-2 \leq n \leq 3$, le signal de sortie $n \mapsto x(n)$. Prendre comme unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 0,5 cm sur l'axe des ordonnées.

Exercice 2

12 points

Pour toutes les spécialités

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.



Dans le système représenté ci-dessus, e et s sont respectivement les signaux d'entrée et de sortie, causaux (nuls pour t négatif).

On suppose que le système est régi par l'équation différentielle :

$$LC \frac{d^2s}{dt^2}(t) + RC \frac{ds}{dt}(t) + s(t) = e(t) \quad (1)$$

L , R et C sont des constantes réelles strictement positives. De plus à l'instant initial :

$$s(0^+) = 0 \text{ et } \frac{ds}{dt}(0^+) = 0$$

Partie A

On suppose que les fonctions e et s admettent des transformées de Laplace notées respectivement E et S .

1. La fonction de transfert H du système est définie par $S(p) = H(p) \times E(p)$.
En appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de l'équation (1), exprimer $H(p)$ en fonction de L , R et C .
2. On suppose que $e(t) = \mathcal{U}(t-1) - \mathcal{U}(t-2)$
où \mathcal{U} est la fonction échelon unité :

$$\begin{cases} \mathcal{U}(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ \mathcal{U}(t) = 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$
 - a. Tracer la courbe représentative de la fonction e dans un repère du plan.
 - b. Déterminer $E(p)$.
3. Dans la suite de l'exercice, on considère que $L = 2$, $R = 1000$ et $C = 2 \cdot 10^{-6}$.

a. Vérifier que $H(p) = \frac{500^2}{(p+250)^2 + (250\sqrt{3})^2}$.

b. On admet que :

$$\frac{1}{p} H(p) = \frac{1}{p} - \frac{p+250}{(p+250)^2 + (250\sqrt{3})^2} - \frac{250}{(p+250)^2 + (250\sqrt{3})^2}$$

Déterminer l'original h_1 de la fonction $p \mapsto \frac{1}{p} H(p)$.

Exprimer $s(t)$ à l'aide de $h_1(t)$.

- c. Donner l'expression de $s(t)$ sur chacun des intervalles $] -\infty ; 1[$, $[1 ; 2[$ et $[2 ; +\infty[$.

Partie B

On rappelle que $H(p) = \frac{500^2}{(p + 250)^2 (250\sqrt{3})^2}$.

1. On considère la fonction r définie pour tout réel $\omega > 0$ par :

$$r(\omega) = | H(j\omega) |$$

où j est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

Montrer que $r(\omega) = \frac{500^2}{\sqrt{\omega^4 - 500^2\omega^2 + 500^4}}$.

2. On considère la fonction f définie pour tout réel $\omega > 0$ par :

$$f(\omega) = \omega^4 - 500^2\omega^2 + 500^4$$

Montrer que $f'(\omega) = 4\omega(\omega - 250\sqrt{2})(\omega + 250\sqrt{2})$.

3. Montrer que $r'(\omega)$ est du signe de $-f'(\omega)$.
4. En déduire que $r(\omega)$ est maximal pour une valeur de ω_0 de ω . Donner la valeur de ω_0 et calculer $r(\omega_0)$.

La partie B permet de déterminer le maximum du gain pour le système étudié en régime harmonique.