

🌀 Brevet de technicien supérieur 8 novembre 2016 🌀
groupement A Nouvelle-Calédonie

A. P. M. E. P.

Exercice 1

5 points

Une machine industrielle produit des pièces qui peuvent présenter deux défauts : un défaut A avec une probabilité de 0,02 et un défaut B avec une probabilité de 0,06. La probabilité qu'une pièce présente les 2 défauts est de 0,011.

On note A l'évènement : « la pièce présente le défaut A » et B l'évènement : « la pièce présente le défaut B ».

Partie A. - QCM

Ces questions sont posées sous la forme d'un QCM. Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, une seule des réponses est exacte. On écrira sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie. Chaque bonne réponse rapporte 0,5 point. L'absence de réponse ou une mauvaise réponse n'enlève pas de point.

1. Les évènements A et B
 - a. sont incompatibles.
 - b. ne sont pas indépendants.
 - c. forment une partition.
 - d. sont des évènements contraires.
2. La probabilité qu'une pièce présente au moins un défaut est :

| | |
|----------|------------|
| a. 0,08 | c. 0,069 |
| b. 0,011 | d. 0,001 2 |
3. La probabilité qu'une pièce ne présente aucun des deux défauts est :

| | |
|------------|----------|
| a. 0,931 | c. 0,92 |
| b. 0,998 8 | d. 0,989 |
4. Sachant qu'une pièce présente le défaut A, la probabilité qu'elle présente le défaut B est :

| | |
|----------|------------|
| a. 0,06 | c. 0,183 3 |
| b. 0,011 | d. 0,55 |

Partie B

Pour la suite on suppose que la probabilité qu'une pièce soit défectueuse est 0,07. On appelle X la variable aléatoire qui, à tout lot de 200 pièces prélevées au hasard dans la production, associe le nombre de pièces défectueuses. La production étant importante ces prélèvements peuvent être assimilés à des tirages avec remise.

1.
 - a. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X ? Justifier la réponse et préciser les paramètres de cette loi.
 - b. Donner l'espérance de la variable aléatoire X. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
2. *Les résultats seront arrondis au millième.*
 - a. Déterminer la probabilité qu'un lot contienne exactement 5 pièces défectueuses.
 - b. Déterminer la probabilité qu'un lot contienne plus de 5 pièces défectueuses.

Exercice 2**10 points**

Les systèmes automatisés actuels nécessitent très souvent l'utilisation de moteurs fonctionnant avec des vitesses variables. Les variateurs de vitesse permettent cela en suivant diverses stratégies de commande.

Les tensions délivrées par ces variateurs, riches en harmoniques, sont responsables de pertes énergétiques indésirables par rapport au fonctionnement sous tension sinusoïdale (couple vibratoire, pertes par hystérésis et courant de Foucault).

Il existe des solutions permettant de minimiser les harmoniques de faibles fréquences, en dehors du fondamental. On se propose de comparer deux de ces solutions :

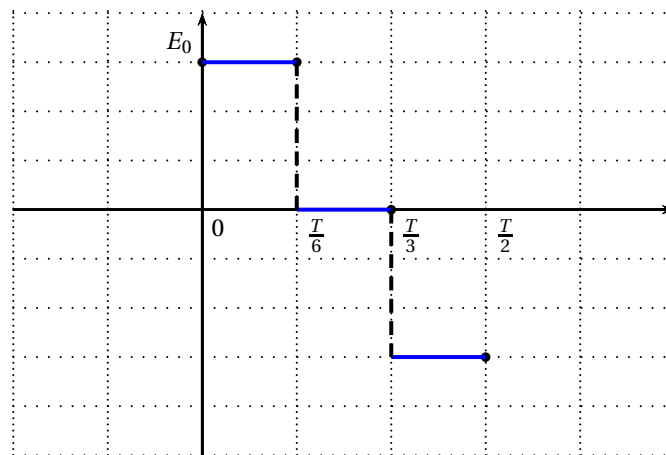
- **la commande pleine onde** ;
- **la commande par MLI** (modulation de largeur d'impulsion) ou **PWM** (pulse width modulation) en anglais.

Le but de cet exercice est de déterminer laquelle des deux commandes minimise le mieux les premières harmoniques indésirables.

Partie A : Commande pleine onde

La tension délivrée par le variateur, exprimée en volt, dépend du temps exprimé en seconde.

Elle peut être modélisée par une fonction f définie sur \mathbb{R} , paire et périodique de période T , dont la représentation sur l'intervalle $\left[0; \frac{T}{2}\right]$ est :



1. a. Compléter, sur le **document réponse 1** la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle $[-T; 2T]$.

Dans la pratique une période réaliste serait $T = 20$ ms, mais pour simplifier les calculs on fait un changement d'échelle et **pour toute la suite de l'exercice on prendra $T = 2\pi$** .

- b. Donner une expression de $f(t)$ pour t appartenant à chacun des intervalles $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$, $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right]$ et $\left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$.

2. On admet que la fonction f est développable en série de Fourier et que, pour tout réel t :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)), \text{ avec } \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

On rappelle que : $a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt$ et que, pour tout entier n non nul :

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega t) dt \quad \text{et} \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\omega t) dt.$$

- a. Calculer a_0 .
- b. Que peut-on dire des coefficients b_n pour tout entier naturel non nul n ? Justifier.
- c. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$: $a_n = \frac{2E_0}{n\pi} \left(\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(n\frac{2\pi}{3}\right) \right)$.

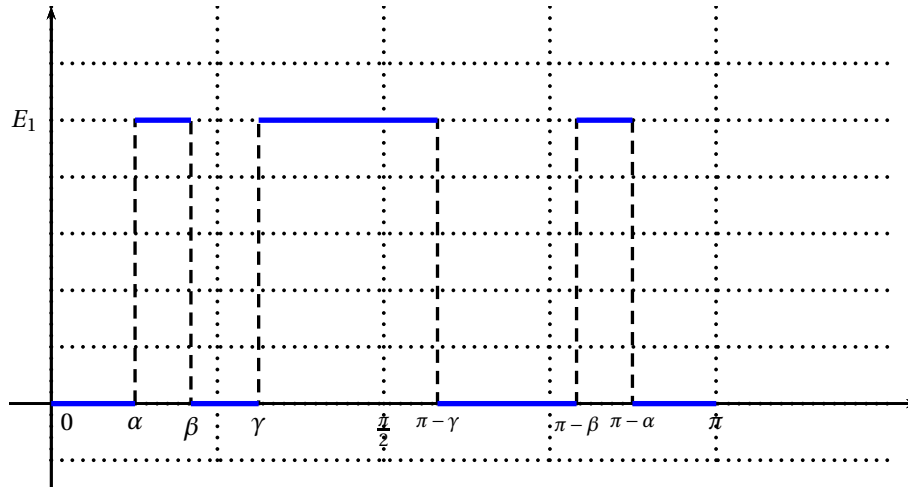
3. Compléter le tableau de valeurs figurant dans le **document réponse 1**.

Pour le calcul des valeurs approchées on prendra : $E_0 = 513,22$ V.

4. Compléter la représentation spectrale donnée dans le **document réponse 1**.

Partie B. - Commande par MLI

La tension délivrée par le variateur peut être, pour la commande par MLI, modélisée par une fonction g , définie sur \mathbb{R} , impaire et périodique de période $T = 2\pi$ dont la représentation sur l'intervalle $[0 ; \pi]$ est :



où α, β et γ sont trois réels tels que $0 < \alpha < \beta < \gamma < \frac{\pi}{2}$.

On admet

- que la fonction g est développable en série de Fourier sous la forme :

$$g(t) = a'_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a'_n \cos(n\omega t) + b'_n \sin(n\omega t));$$

- que pour tout entier naturel n : $a'_n = 0$,
- que pour tout entier naturel non nul n : $b'_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(t) \sin(n\omega t) dt$.

Avec un logiciel de calcul formel, on obtient les résultats suivants :

| | | |
|---|---|--|
| ? | Sau | Config : exact real RAD 12 xcas |
| 1 | int(sin(n * t), t, alpha, beta); | $\frac{-\cos(n \times \beta)}{n} - \frac{-\cos(n \times \alpha)}{n}$ |
| 2 | int(sin(n * t), t, gamma, pi - gamma); | $\frac{-\cos(n \times \pi - n \times \gamma)}{n} - \frac{-\cos(n \times \gamma)}{n}$ |
| 3 | int(sin(n * t), t, pi - beta, pi - alpha); | $\frac{-\cos(n \times \pi - n \times \alpha)}{n} - \frac{-\cos(n \times \pi - n \times \beta)}{n}$ |
| 4 | trigexpand(cos(n * x) - cos(n * pi - n * x)); | $-\cos(n \times \pi) \times \cos(n \times x) + \sin(n \times \pi) \times (-\sin(n \times x)) + \cos(n \times x)$ |

1. À l'aide de la copie d'écran ci-dessus :
- Montrer que pour tout réel x : $\cos(nx) - \cos(n\pi - nx) = (1 - (-1)^n) \cos(nx)$.
 - Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$b'_n = \frac{2E_1}{n\pi} (1 - (-1)^n) [\cos(n\alpha) - \cos(n\beta) + \cos(n\gamma)].$$

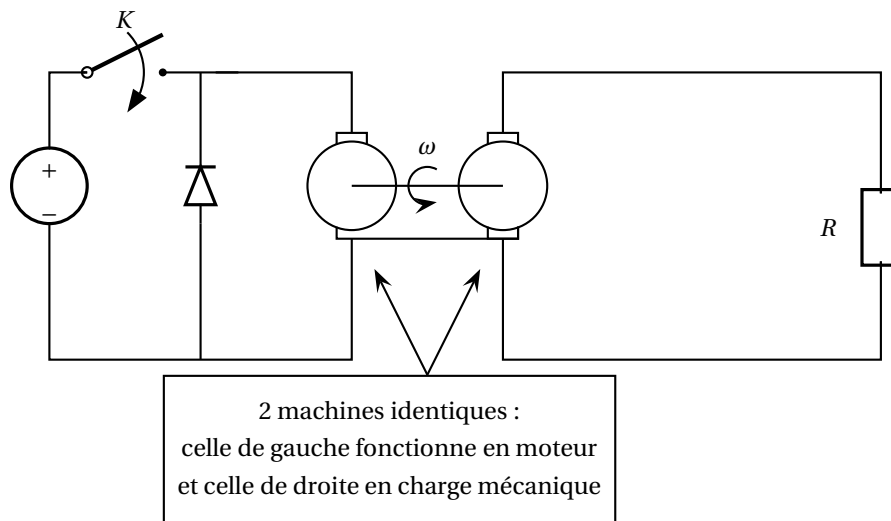
2. On pose $E_1 = 544,00 \text{ V}$, $\alpha = 0,396$, $\beta = 0,66$ et $\gamma = 0,817$.
- Compléter le tableau de valeurs figurant dans le **document réponse 2**.
 - On donne, sur le **document réponse 2**, la représentation spectrale (limitée aux premières harmoniques) de g .
Quelle commande (pleine onde ou MLI) semble permettre de limiter les harmoniques indésirables et les pertes qui sont liées ?

Exercice 3

5 points

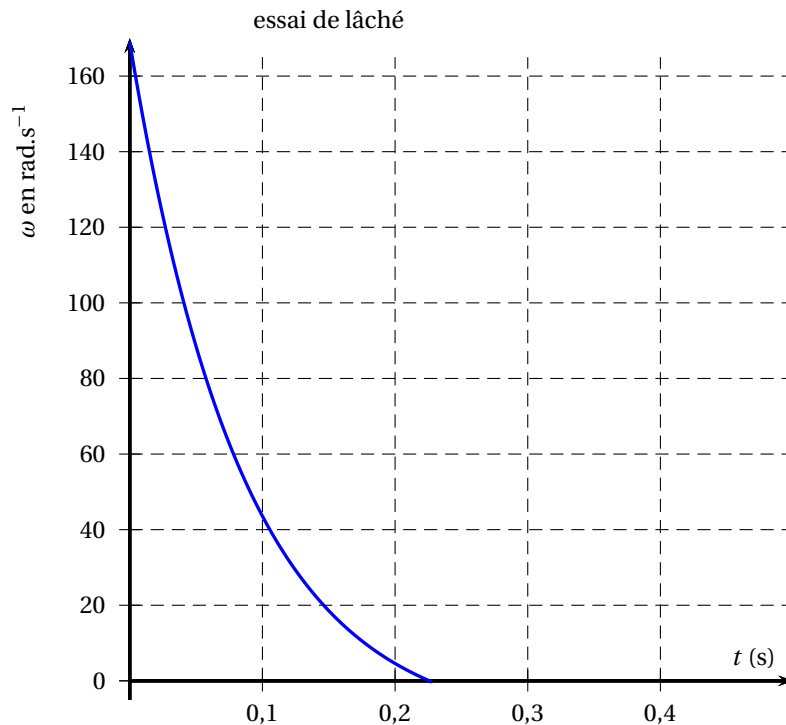
Lors d'un choix de moteur en vue de réaliser un automatisme, il est important de connaître le moment d'inertie du moteur et de la charge mécanique afin de prévoir les couples d'accélération que devra fournir le moteur.

L'expérience suivante (lâché du moteur en charge) permet de déterminer la valeur du moment d'inertie d'une machine à courant continu :



Tout d'abord on porte l'axe de rotation à la vitesse nominale (ici $\omega_0 = 169 \text{ rad.s}^{-1}$, ce qui est proche de 1500 tr.min^{-1}) en fermant l'interrupteur K.

Une fois la vitesse nominale atteinte on coupe l'alimentation du moteur en ouvrant l'interrupteur K et la vitesse de rotation $\omega(t)$ décroît de manière exponentielle jusqu'à un instant t_0 .



On peut montrer que, pour t variant de 0 à t_0 , $\omega(t)$ vérifie :

$$J \frac{d\omega(t)}{dt} = -C_0 - \frac{k^2}{R} \omega(t) \quad (1)$$

où

- J est le moment d'inertie de l'ensemble tournant, exprimé en kg.m^2 ,
- $C_0 = 0,11 \text{ N.m}$ est la valeur des frottements secs,
- $k = 0,174 \text{ N.m.A}^{-1}$ est une constante caractéristique de la machine
- et $R = 3,6 \Omega$.

1. Montrer que l'égalité (1) peut s'écrire : $\frac{d\omega(t)}{dt} + \frac{\omega(t)}{\tau} = \frac{-C_0}{J}$,
où τ est une constante que l'on exprimera en fonction de R , J et k .
2. On note (E) l'équation différentielle : $y' + \frac{1}{\tau}y = \frac{-C_0}{J}$.
 - a. Résoudre l'équation différentielle sans second membre associée à (E) :

$$y' + \frac{1}{\tau}y = 0 \quad (E_0).$$

- b. Déterminer une solution particulière y_p de l'équation différentielle (E).
On pourra chercher cette solution parmi les fonctions constantes.
 - c. En déduire **les** solutions de l'équation différentielle (E).
3. En utilisant la condition initiale $\omega(0) = \omega_0$, montrer que, pour tout t appartenant à l'intervalle $[0 ; t_0]$, on a : $\omega(t) = \left(\omega_0 + \frac{C_0\tau}{J}\right)e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{C_0\tau}{J}$.
4. Une modélisation de la courbe expérimentale donne :

$$\omega(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} - B \quad \text{avec } A \approx 182 \text{ rad.s}^{-1}, \tau \approx 0,0856 \text{ s et } B = 13 \text{ rad.s}^{-1}.$$

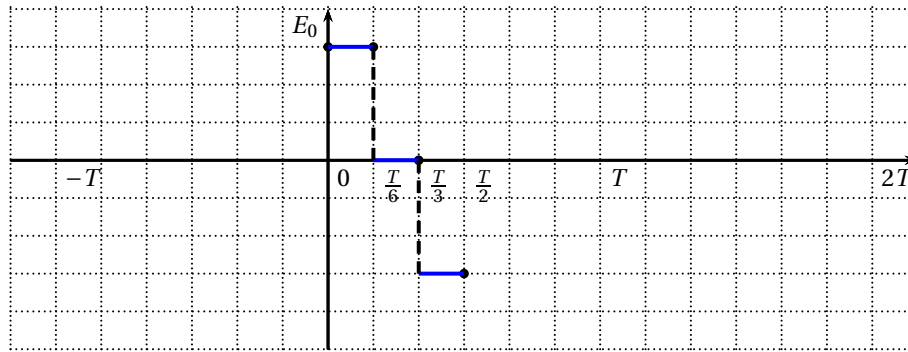
Calculer une valeur approchée du moment d'inertie J . Arrondir la réponse à 10^{-5} près.

5. On note ω' la fonction dérivée de la fonction ω .
À l'instant t la décélération du moteur, exprimée en rad.s^{-2} , est égale à $-\omega'(t)$.
On observe que cette décélération est maximale au moment où l'on ouvre l'interrupteur.
- a. Calculer $\omega'(t)$ pour tout t appartenant à l'intervalle $[0 ; t_0]$.
 - b. Déterminer la décélération maximale du moteur.

Document réponse 1 à rendre avec la copie

Exercice 2

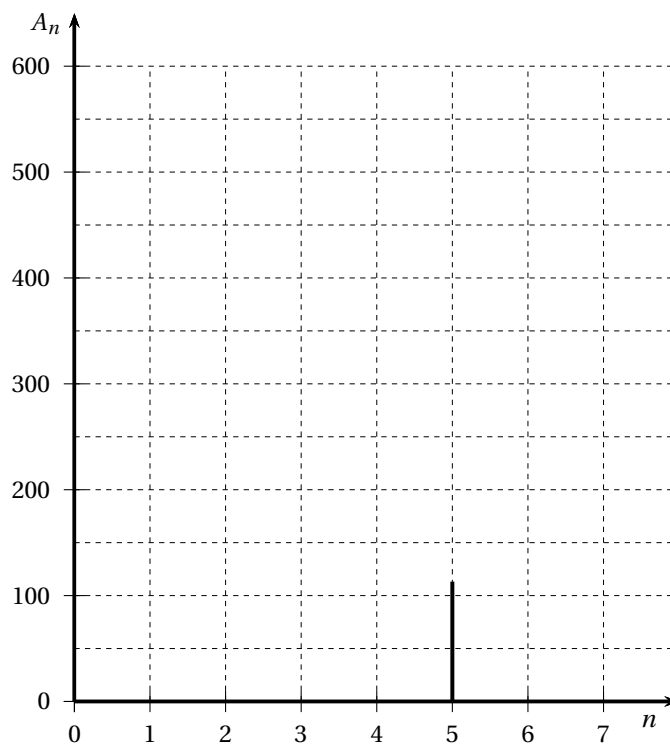
Partie A- Question 1. a. : Représentation graphique de la fonction f



Partie A- Question 3 : Tableau de valeurs à compléter

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|--|----------------------------|---|---|---|--------|---|---|
| Valeur exacte de a_n | $\frac{2E_0\sqrt{3}}{\pi}$ | 0 | | | | | |
| Valeur approchée à 10^{-2} de a_n | | 0 | | | | | |
| Valeur approchée à 10^{-2} de $A_n = \sqrt{(a_n^2 + b_n^2)}$ | | 0 | | | 113,18 | | |

Partie A- Question 4 : Représentation spectrale des premières harmoniques de f



Document réponse 2 à rendre avec la copie

Partie B- Question 2. a. : Tableau de valeurs à compléter

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|--|---|---|---|---|---|---|---|
| Valeur approchée à 10^{-2} de b'_n | | 0 | | 0 | | | |
| Valeur approchée à 10^{-2} de $A'_n = \sqrt{(a'_n)^2 + b'_n{}^2}$ | | 0 | | 0 | | | |

Partie B- Question 2. b. : Représentation spectrale des premières harmoniques de g 