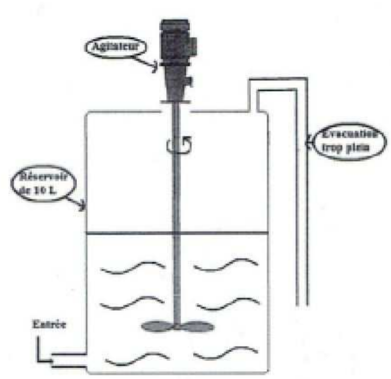
∽ BTS Groupement D 9 mai 2017 ∾

Durée : 2 heures

EXERCICE 1 10 points

Un réservoir d'une capacité de 10 litres contient 2 litres d'un concentré de parfum. On y introduit à partir de l'instant initial $t = 0$, de l'éthanol, avec un débit de 20 cm^3 par seconde. Le liquide présent dans le réservoir est mélangé en permanence par un agitateur.
Dans tout le problème, $Q(t)$ désigne la quantité, en cm^3, d'éthanol présente dans le récipient à l'instant t exprimé en secondes.
On rappelle qu'un litre vaut 1 000 cm^3.



Partie A : Étude qualitative du problème

1. **a.** Vérifier que le réservoir contient 5 litres de mélange concentré-éthanol au bout de 150 s.

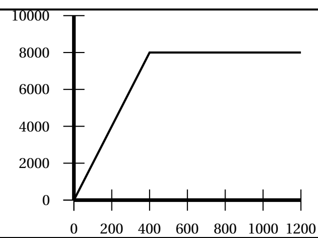
   b. Au bout de combien de temps le réservoir est-il plein ?

2. Alors que le réservoir est plein, suite à un incident, la pompe continue à l'alimenter dans les mêmes conditions. Un système de trop-plein a été prévu dans ce cas de figure, et dès cet instant, chaque seconde 20 cm^3 de liquide homogène s'échappe par ce système.

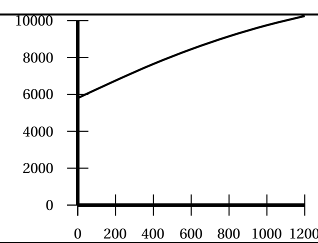
   On s'intéresse à la quantité Q d'éthanol présente dans le récipient depuis l'instant initial, moment où commence le remplissage du réservoir.

   a. D'après vous, comment varie cette quantité Q en fonction du temps ? Argumenter.

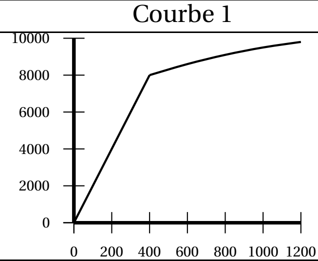
   b. Parmi les quatre courbes ci-dessous (l'axe des abscisses représente le temps exprimé en secondes, l'axe des ordonnées, la quantité Q exprimée en cm^3), une seule représente la quantité d'éthanol présente dans le réservoir en fonction du temps. Laquelle ? Justifier votre choix.



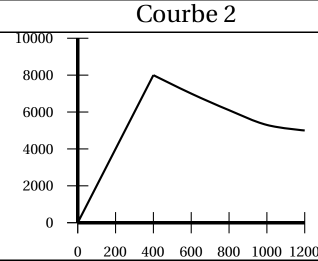
Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3



Courbe 4

Dans la suite du problème, on va modéliser plus précisément la quantité Q, suite à l'incident.

Partie B : Une équation différentielle

On admet que, pour tout instant $t \geqslant 400$, la quantité d'éthanol présente dans le réservoir vérifie l'équation différentielle :

$$Q'(t) + 0,002Q(t) = 20, \quad \text{avec } Q(400) = 8\,000.$$

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) : \quad y' + 0,002y = 20$$

où l'inconnue y est une fonction de la variable t, avec $t \in [400\ ;\ +\infty[$.

1. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène associée

$$(E_0) : \quad y' + 0,002y = 0.$$

2. Déterminer le réel a tel que la fonction constante $t \longmapsto a$ soit une solution particulière de (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E).
4. Déterminer la fonction Q répondant au problème posé.

Partie C : Étude d'une fonction

On considère la fonction Q_1 définie pour tout réel t de l'intervalle $[400\ ;\ +\infty[$ par :

$$Q_1(t) = 10\,000 - 4\,451,1\mathrm{e}^{-0,002t}.$$

On admet que cette fonction exprime la quantité d'éthanol présente dans le récipient pour $t \geqslant 400$.

1. Calculer la limite de Q_1 en $+\infty$. Interpréter ce résultat.
2. En étudiant les variations de la fonction Q_1 vérifier mathématiquement le résultat de la partie A question 2. a.
3. On veut déterminer l'instant t où la proportion d'éthanol dans le réservoir vaut 85 %. Par la méthode de votre choix déterminer une valeur approchée à l'unité près de la solution.
   On donnera une description de la méthode utilisée.
4. Cette question fait l'objet d'un QCM : on écrira l'unique réponse correcte sur la copie, aucune justification n'est demandée.
   On considère l'algorithme suivant :

```
Demander A un nombre réel compris strictement entre 8 000 et 10 000
Mettre 400 dans T
Tant que 10000 − 4451,1 e^(−0,002T) < A
        Mettre T + 10 dans T
        Fin du Tant que
Afficher T
```

Cet algorithme a pour but de :

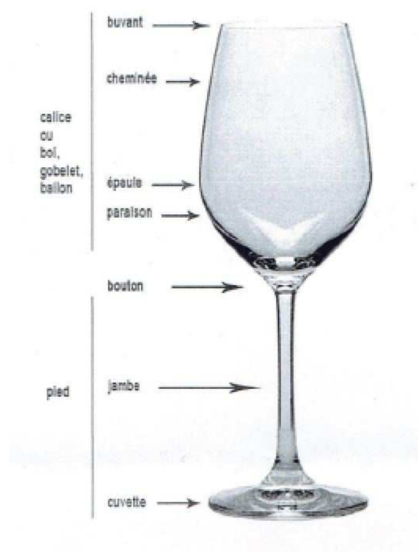
Réponse a. : Déterminer la valeur exacte de l'équation $Q_1(t) = A$ dans l'intervalle $[400\ ;\ +\infty[$.
Réponse b. : Déterminer une valeur approchée par défaut à 10 près de l'équation $Q_1(t) = A$ dans l'intervalle $[400\ ;\ +\infty[$.
Réponse c. : Déterminer une valeur approchée par excès à 10 près de l'équation $Q_1(t) = A$ dans l'intervalle $[400\ ;\ +\infty[$.
Réponse d. : Déterminer les solutions de l'inéquation $Q_1(t) > A$ dans l'intervalle $[400\ ;\ +\infty[$

EXERCICE 2 10 points

Les parties A, B, C et D suivantes peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A. Défauts de fabrication

Un verre à pied est constitué de deux parties : le calice (ou bol) et le pied. Ces deux parties sont assemblées à chaud et fabriquées par deux procédés différents. Elles peuvent présenter des défauts indépendamment l'une de l'autre.
On a constaté que la machine qui fabrique les calices produit 5 % de calices défectueux et que la machine qui fabrique les pieds produit 2 % de pieds défectueux.
On appelle A l'évènement « le calice est défectueux »et B l'évènement « le pied est défectueux ». On prélève un verre au hasard dans la production.



1. Calculer la probabilité pour que le verre ait les deux défauts.
2. Calculer la probabilité pour que le verre soit défectueux c'est-à-dire que le verre ait au moins un des deux défauts.

Partie B. Vérification d'un lot

Dans un stock important de verres à pied, on en prélève 20 au hasard pour vérification. Le stock est assez important pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 20 verres. On considère la variable aléatoire X qui à tout prélèvement de 20 verres associe le nombre de verres défectueux. On suppose que la probabilité qu'un verre soit défectueux est de $p = 0,069$.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer à 10^{-2} près la probabilité de l'évènement « dans un tel prélèvement. cinq verres au moins sont défectueux ».

Partie C. Diamètre du buvant du verre

Dans cette question on s'intéresse au diamètre, exprimé en millimètre, d'ouverture du verre appelée « buvant » du verre.
On note D la variable aléatoire qui à chaque verre associe le diamètre de son « buvant ». On admet que D suit la loi normale de paramètres $m = 46$ et $\sigma = 0,3$.
On prélève au hasard un verre dans la production.

1. Calculer à 10^{-2} près la probabilité que le diamètre de ce verre soit compris entre 45,8 et 46,3.
2. Déterminer. par la méthode de votre choix, une valeur approchée à 10^{-1} du nombre réel a tel que $P(46 - a \leqslant D \leqslant 46 + a) = 0,95$.

Partie D. Brillance des verres

La brillance des verres est contrôlée par un dispositif électronique qui analyse les reflets du verre. La durée de bon fonctionnement de ce dispositif, exprimée en mois, est modélisée par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.

Ainsi, pour tout réel t positif, la probabilité que le dispositif ait un temps de bon fonctionnement inférieur ou égal à t mois, est donnée par :

$$P(T \leqslant t) = \int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que $P(T \leqslant t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

2. Sachant que $P(T \leqslant 24) = 0,93$, montrer que la valeur arrondie au centième de λ est $0,11$.

3. Quelle est l'espérance de la durée de bon fonctionnement de ce dispositif ? On arrondira à l'unité et on interprétera le résultat.

4. La probabilité que la durée de vie soit supérieure à 4 ans est-elle supérieure à 1 % ?
Justifier.

On rappelle que e^u est une primitive de $u'\mathrm{e}^u$.