A. P. M. E. P.

Brevet de technicien supérieur groupement B1
13 mai 2019 - Métropole–Antilles–Guyane–Polynésie

Exercice 1 **10 points**

Lorsqu'un fil électrique est parcouru par un courant électrique d'intensité constante, celui-ci s'échauffe par effet Joule et sa température varie en fonction du temps. On note $f(t)$ la température, exprimée en degré Celsius, du conducteur à l'instant t, exprimé en seconde, avec t variant dans l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

Dans cet exercice, on se propose d'étudier l'évolution de la température du conducteur en fonction du temps.

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

A. Résolution d'une équation différentielle

À l'instant $t = 0$ de la mise sous tension, la température du conducteur est celle du milieu ambiant, c'est-à-dire 18 degrés Celsius. Ainsi, on a $f(0) = 18$.
Dans les conditions de l'expérience, la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) :

$$y' + 0,05y = 2,$$

où y est une fonction inconnue de la variable t, définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, et y' sa fonction dérivée.

1. **a.** Résoudre l'équation (E_0) : $\quad y' + 0,05y = 0$.
   On fournit la formule suivante :

Équation différentielle	Solutions sur un intervalle I
$ay' + by = 0$	$f(t) = k\mathrm{e}^{-\frac{b}{a}t}$

   b. Vérifier que la fonction g définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(t) = 40$ est une solution de l'équation différentielle (E).
   c. En déduire les solutions définies sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ de l'équation différentielle (E).
2. On rappelle que la température initiale du conducteur est 18° Celsius.
   Ainsi, la fonction f exprimant la température du conducteur est la solution de l'équation différentielle (E) vérifiant la condition initiale $f(0) = 18$.
   Déterminer alors une expression de la fonction f.

B. Étude de la fonction f

On admet que la fonction donnant la température du conducteur est la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(t) = -22\mathrm{e}^{-0,05t} + 40.$$

On note C la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal.
La courbe C est tracée en annexe.

1. **a.** On admet que $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,05t} = 0$.
   Déterminer alors la limite de la fonction f en $+\infty$.

b. En déduire que la courbe C admet une asymptote dont on donnera une équation.
Tracer cette asymptote sur la représentation graphique donnée en annexe.

2. Un logiciel de calcul formel permet d'obtenir ci-dessous une expression de la dérivée f' de la fonction f.

1	$f(t)$	$:= -22\mathrm{e}^{-0{,}05t} + 40$
•	$\to f(t)$	$:= -22\mathrm{e}^{-\frac{1}{20}t} + 40$
2	Dérivée$(f(t), t)$	
	$\to$	$\dfrac{11}{10}\mathrm{e}^{-\frac{1}{20}t}$

a. En admettant ce résultat, étudier les variations de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$.

b. Dresser le tableau de variation de f sur $[0\,;\,+\infty[$.

3. Ce même logiciel de calcul formel affiche la partie régulière du développement limité à l'ordre 2 de la fonction f au voisinage de zéro.

3	PolynômeTaylor$(f(t), t, 0, 2)$
	$\to 18 + \dfrac{11}{10}t - \dfrac{11}{400}t^2$

Les deux questions suivantes sont des questions à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous parait exacte. On ne demande aucune justification. La réponse juste rapporte 0,5 *point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.*

a. Une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0 est :

$y = 18$	$y = 18 + \dfrac{11}{10}t$	$y = 18 + \dfrac{11}{10}t - \dfrac{11}{400}t^2$

b. La vitesse de chauffe, exprimée en degré Celsius par seconde, à l'instant initial est égale à $f'(0)$. Cette vitesse vaut :

18	$\dfrac{11}{10}$	$\dfrac{11}{400}$

C. Dépassement d'un seuil et algorithmique

On cherche à déterminer le premier instant t, en seconde, à partir duquel la température du fil du conducteur dépasse 21°Celsius.
À cette fin, on considère l'algorithme suivant.

$t \leftarrow 0$
Tant que $f(t) \leqslant 21$
$\quad t \leftarrow t + 1$
Fin de Tant que

Remarque : dans cet algorithme $t \leftarrow 0$ signifie que t prend la valeur 0.

1. Faire tourner cet algorithme « à la main » en complétant le tableau donné en annexe.

2. Quelle sera la valeur contenue dans la variable t à la fin de l'algorithme ?
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 2 **10 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.
Dans cet exercice, sauf mention du contraire, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3}.

Un grand constructeur d'engins de travaux publics sous-traite la fabrication de chenilles et de pneumatiques à deux entreprises.

A. Événements indépendants

Dans la première entreprise, les pneumatiques produits sont soumis à un contrôle de qualité constitué de deux tests. On prélève au hasard un pneumatique après contrôle. On considère les évènements suivants :
A : « le pneumatique a validé le premier test » ;
B : « le pneumatique a validé le second test ».
Un pneumatique est dit conforme s'il a validé les deux tests.
Une étude statistique permet d'admettre que les probabilités des évènements A et B sont respectivement $P(A) = 0,98$ et $P(B) = 0,85$ et que les évènements A et B sont indépendants.
Calculer les probabilités des évènements suivants :

1. E_1 : « le pneumatique contrôlé est conforme » ;
2. E_2 : « le pneumatique contrôlé n'est pas conforme » ;
3. E_3 : « le pneumatique n'a validé qu'un seul des deux tests. ».

B. Loi exponentielle

Dans la seconde entreprise, fabriquant les chenilles, une machine est chargée d'assembler le barbotin moteur des chenilles. Le barbotin moteur est la roue dentée, à une ou deux rangées de dents, qui entraîne la chenille.
Cette machine nécessite d'être étalonnée très régulièrement. La durée de bon fonctionnement entre deux étalonnages, exprimée en heure, de cette machine est modélisée par une variable aléatoire T de loi exponentielle de paramètre λ.
On rappelle les formules suivantes :

Loi exponentielle	
$P(T \leqslant t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$	$E(T) = \dfrac{1}{\lambda}$

1. Pour cette machine, l'entreprise a constaté que la durée moyenne de bon fonctionnement est 10 heures.
   Montrer que $\lambda = 0,1$.
2. **a.** Calculer $P(T \leqslant 20)$.
   b. Déterminer la probabilité que la durée de bon fonctionnement de cette machine dépasse 15 heures.
3. Déterminer la durée médiane de bon fonctionnement, c'est-à-dire la valeur t_0 telle que :

$$P(T \leqslant t_0) = 0,5.$$

C. Intervalle de confiance

Pour assurer la suspension de l'engin, de nombreux systèmes peuvent être utilisés : des balanciers, des bras oscillants, des ressorts à lames ou hélicoïdaux ou encore des suspensions hydropneumatiques.
Dans cette partie, on s'intéresse à la fabrication de ressorts hélicoïdaux. On souhaite estimer la proportion p de ressorts conformes dans l'ensemble de la production. Pour cela on prélève au hasard un échantillon de 50 ressorts parmi cette production (celle-ci est suffisamment importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise).
On constate que 44 ressorts de cet échantillon sont conformes aux normes fixées par le cahier des charges.

1. Donner une estimation ponctuelle f de la proportion inconnue p des ressorts qui sont conformes aux normes dans l'ensemble de la production.

2. Soit$F$ la variable aléatoire qui à tout échantillon de 50 ressorts ainsi prélevé, associe la fréquence, dans cet échantillon, des ressorts conformes. On suppose que F suit la loi normale de moyenne p inconnue et d'écart type $\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$.
On fournit la formule suivante :

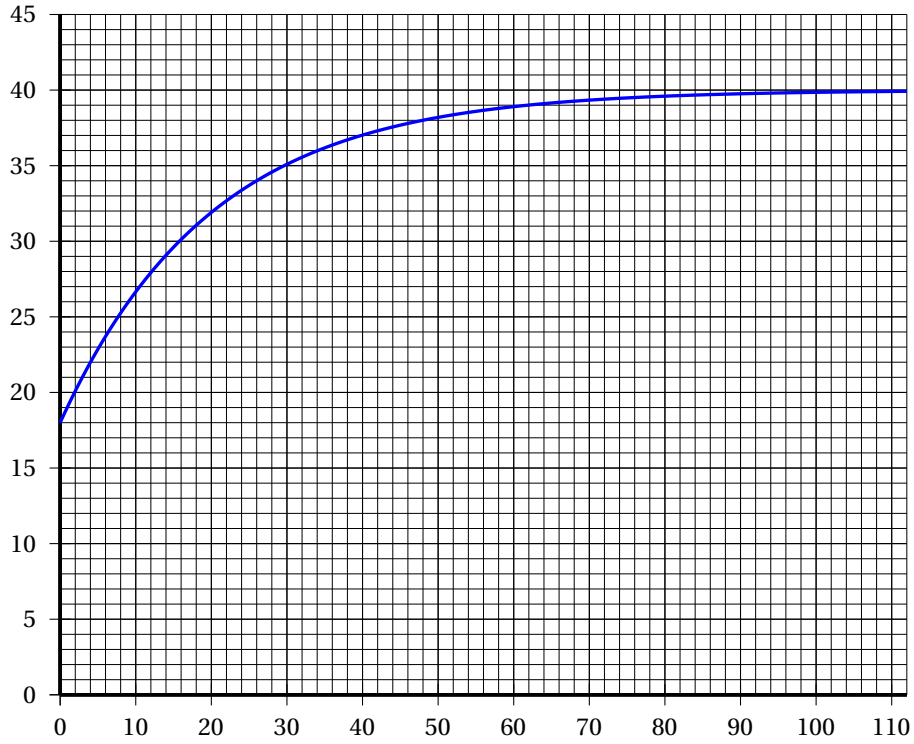
Intervalle de confiance d'une proportion à 95 %
$\left[t-1,96\sqrt{\dfrac{f(1-f)}{n}}\ ;\ t+1,96\sqrt{\dfrac{f(1-f)}{n}}\right]$

a. Déterminer un intervalle de confiance centré sur f de la proportion p au niveau de confiance de 95 %.

b. Peut-on affirmer que p est compris dans cet intervalle de confiance ? Pourquoi ?

ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE

EXERCICE 1 QUESTION B. 1. b.



EXERCICE 1 QUESTION C. 1.

Valeur de t	Valeur de $f(t)$ arrondie à 10^{-2}	Condition $f(t) \leqslant 21$
0	18	Vraie
1		