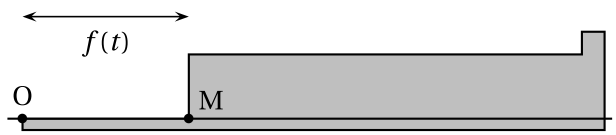
# BTS Métropole 15 mai 2023

## Groupement B2 [1]

## Durée : 2 heures

**L'usage de calculatrice avec mode examen actif est autorisé**
**L'usage de calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé**

**Exercice 1** **10 points**




Lorsqu'un tiroir se referme, le fond du tiroir, marqué par le point M, se rapproche du fond du meuble, marqué par le point O (voir croquis ci-dessus).
On note $f(t)$, la distance entre le point O et le point M, à l'instant $t$.
$f(t)$ est exprimée en centimètres et $t$ est exprimée en seconde.
L'instant $t = 0$ correspond au moment où l'utilisateur pousse le tiroir pour le fermer.

*Les deux parties peuvent être traitées de façon indépendante*

**Partie A. Résolution d'une équation différentielle**

On admet que la fonction $f$ est solution de l'équation différentielle :

$$(E_0) : \; y'' + 5y' + 4y = 0,$$

où $y$ est une fonction inconnue de la variable réelle $t$, définie et deux fois dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$, et où $y'$ est la dérivée de $y$, et $y''$ la dérivée seconde de $y$.

**1.** **a.** Résoudre l'équation : $r^2 + 5r + 4 = 0$.

**b.** Résoudre l'équation différentielle $(E_0)$.

On fournit le tableau suivant :

| | Équation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0$. | Équation différentielle : $ay'' + by' + cy = 0$. |
|---|---|---|
| $\Delta > 0$ | 2 solutions réelles distinctes : $r_1$ et $r_2$. | $y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$. |
| $\Delta = 0$ | 1 solution réelle : $r_0$. | $y(t) = (C_1 + C_2 t)\, e^{r_0 t}$. |
| $\Delta < 0$ | 2 solutions complexes conjuguées. $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ | $y(t) = \left[C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)\right] e^{\alpha t}$ |

**2.** On suppose qu'à l'instant $t = 0$, la situation est la suivante :

1. Conception et industrialisation en microtechniques – Électrotechnique

- le point M est situé à 20 cm du point O.
- le point M se déplace vers le point O avec une vitesse négative égale à $-10$ cm·s$^{-1}$.

**a.** En déduire la valeur de $f(0)$ et celle de $f'(0)$.

**b.** On admet que :

$$f(t) = \frac{70}{3}\mathrm{e}^{-t} - \frac{10}{3}\mathrm{e}^{-4t}.$$

Déterminer la valeur exacte de la distance OM, deux secondes après le début de la fermeture.

**c.** Le tiroir est dit *fermé* lorsque la distance OM est inférieure à 0,5 cm.

Le constructeur affirme que le tiroir est *fermé* en moins de 4 secondes.

A-t-il raison ? Justifier.

**Partie B. Étude de fonction**

On considère à nouveau la fonction $f$ définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(t) = \frac{70}{3}\mathrm{e}^{-t} - \frac{10}{3}\mathrm{e}^{-4t}.$$

On admet que la fonction $f$ est dérivable et on note $f'$ sa fonction dérivée.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction $f$.

**1.** **a.** On rappelle que $\displaystyle\lim_{u\to+\infty} \mathrm{e}^{-u} = 0$. Déterminer $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t)$.

**b.** En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ possède une asymptote dont on donnera une équation.

**2.** **a.** Déterminer $f'(t)$ pour tout $t$ appartenant à $[0\,;\,+\infty[$.

**b.** On admet que sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ on a $f'(t) < 0$.

En déduire le tableau de variations de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

**3.** On considère l'algorithme suivant :

```
t ← 0
p ← 0,1
s ← 0,5
Tant que (70/3)e^(−t) − (10/3) ∗ e^(−4t) > s
        t ← t + p
Fin Tant que.
```

**a.** Recopier le tableau ci-dessous, au besoin en rajoutant des lignes, et compléter à partir de la ligne numéro 36 jusqu'a ce que l'algorithme s'arrête.

| ligne | t | Valeur de $f(t)$ arrondie à $10^{-2}$ | Condition (70/3)* e ^(- t) - (10/3)* e^(- 4t) > s |
|---|---|---|---|
| ligne numéro 0 | 0 | 20 | VRAIE |
| ligne numéro 1 | 0,1 | 18,88 | VRAIE |
| ligne numéro 2 | 0,2 | 17,61 | VRAIE |
| | | | |
| ligne numéro 36 | 3,6 | … | … |
| ligne numéro 37 | 3,7 | … | … |
| ligne numéro 38 | 3,8 | … | … |

**b.** Quelle est la valeur de la variable $t$ à la fin de l'exécution de l'algorithme ?
Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

**c.** On note $T$ la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
Un logiciel de calcul formel donne la partie régulière du développement limité à l'ordre deux de la fonction $f$ au voisinage de zéro.

| |
|---|
| $f(t)$ |
| $\rightarrow \dfrac{70}{3}\text{e}^{-t} - \dfrac{10}{3}\text{e}^{-4t}$ |
| PolynômeTaylor$(f(t), t, 0, 2)$ |
| $\rightarrow 20 - 10t - 15t^2$ |

**4.** On définit $m$ la position moyenne du tiroir par :

$$m = \frac{1}{4}\int_0^4 f(t)\,\text{d}t.$$

Démontrer que : $m = \dfrac{45}{8} - \dfrac{35}{6}\text{e}^{-4} + \dfrac{5}{24}\text{e}^{-16}$.

**a.** Déterminer une équation de la tangente $T$.

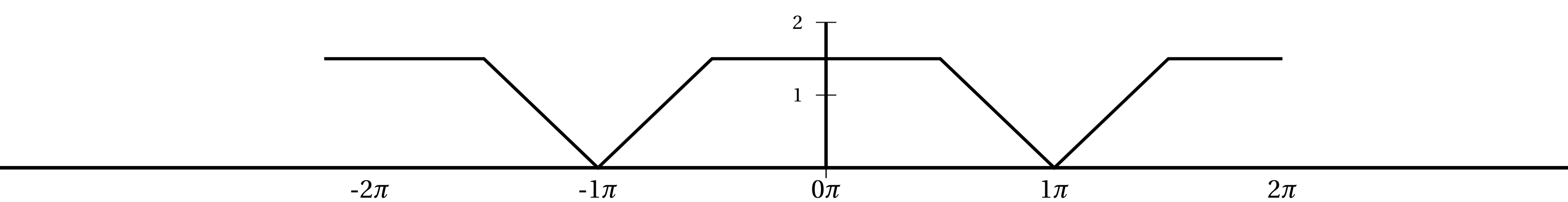
**Exercice 2** **9 points**

*Un formulaire sur les séries de Fourier est placé à la fin de l'exercice.*

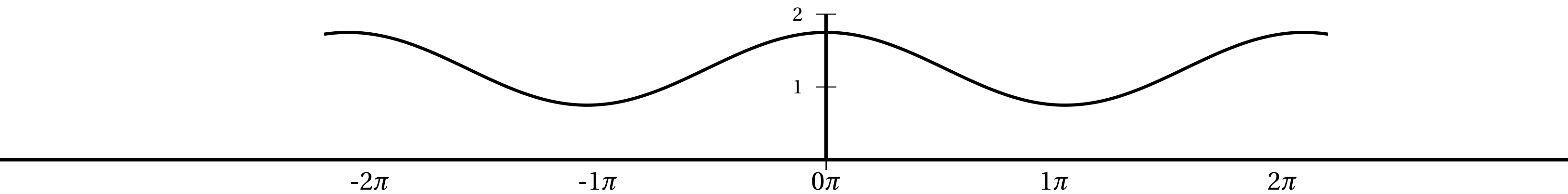
On considère une fonction $f$ pour laquelle on dispose des informations suivantes :

- $f$ est périodique de période $T = 2\pi$ ;
- $f$ est paire.
- $f(t) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & ; \quad \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ \pi - t & ; \quad \text{si } \dfrac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \pi \end{cases}$

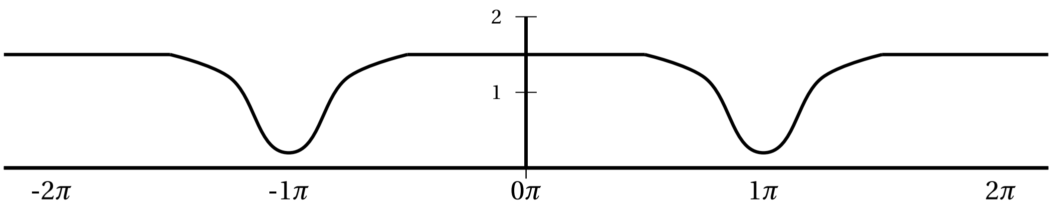
1. **Sur le document-réponse**, tracer la représentation graphique de la fonction $f$ sur l'intervalle $[-2\pi\ ;\ 2\pi]$.
2. Démontrer que, pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 1, on a : $b_n = 0$.
3. On note $\omega$ la pulsation associée à la fonction $f$.
   Déterminer $\omega$.
4. Démontrer que $a_0 = \dfrac{3\pi}{8}$.
5. Démontrer que, pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 1, on a :
$$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(nt)\,\mathrm{d}t + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi - t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t.$$
6. On admet que l'on a :
$$a_n = \frac{2}{\pi n^2}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \cos(n\pi)\right].$$
   Déterminer les valeurs exactes de $a_1$, $a_2$. et $a_3$.
7. En déduire que l'on a :
$$s_3(t) = \frac{3\pi}{8} + \frac{2}{\pi}\cos(t) - \frac{1}{\pi}\cos(2t) + \frac{2}{9\pi}\cos(3t).$$
8. Indiquer, sans justifier, quelle est, parmi les trois courbes ci-après, celle qui est associée à la fonction $s_3$.




Courbe n° 1




Courbe n° 2




Courbe n° 3

**9.** **a.** On note $P = (a_0)^2 + \dfrac{1}{2}\left[(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2\right]$.

Donner une valeur approchée de $P$ à $10^{-4}$.

**b.** On note $F$ la valeur efficace de la fonction $f$.

On admet que $F^2 = \dfrac{\pi^2}{6}$.

On sait que $P$ constitue une approximation de $F^2$.

On cherche à déterminer le pourcentage d'erreur de cette approximation.

**Cette question est une question à choix multiples.**
**Une seule réponse est exacte.**
**Recopier sur la copie la réponse qui vous parait exacte.**
**On ne demande aucune justification.**

Le pourcentage d'erreur de cette approximation est égal à :

| | | |
|---|---|---|
| 0,1 % | 1 % | 10 % |

**Formulaire sur les séries de Fourier**

$f$ est une fonction périodique de période $T$ et de pulsation $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.

Développement en série de Fourier de la fonction $f$ :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right].$$

$$s_n(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{n} \left[a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right].$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t.$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t \quad (n \geqslant 1).$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t \quad (n \geqslant 1).$$

→ Lorsque la fonction $f$ est paire, on a :

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t \quad (n \geqslant 1).$$

**DOCUMENT-RÉPONSE**

**(À rendre avec la copie)**

**EXERCICE 2**

**Question 1.**