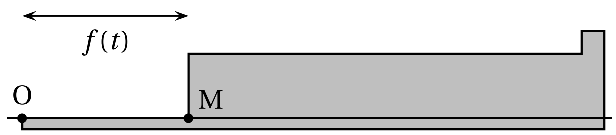
BTS Métropole 15 mai 2023

Groupement B3 [1]

Durée : 3 heures

L'usage de calculatrice avec mode examen actif est autorisé
L'usage de calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé

Exercice 1 **8 points**



Lorsqu'un tiroir se referme, le fond du tiroir, marqué par le point M, se rapproche du fond du meuble, marqué par le point O (voir croquis ci-dessus).
On note $f(t)$, la distance entre le point O et le point M, à l'instant t.
$f(t)$ est exprimée en centimètres et t est exprimée en seconde.
L'instant $t = 0$ correspond au moment où l'utilisateur pousse le tiroir pour le fermer.

Les deux parties peuvent être traitées de façon indépendante

Partie A. Résolution d'une équation différentielle

On admet que la fonction f est solution de l'équation différentielle :

$$(E_0) : \; y'' + 5y' + 4y = 0,$$

où y est une fonction inconnue de la variable réelle t, définie et deux fois dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$, et où y' est la dérivée de y, et y'' la dérivée seconde de y.

1. **a.** Résoudre l'équation : $r^2 + 5r + 4 = 0$.
   b. Résoudre l'équation différentielle (E_0).
   On fournit le tableau suivant :

	Équation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0$.	Équation différentielle : $ay'' + by' + cy = 0$.
$\Delta > 0$	2 solutions réelles distinctes : r_1 et r_2.	$y(t) = C_1\mathrm{e}^{r_1 t} + C_2\mathrm{e}^{r_2 t}$.
$\Delta = 0$	1 solution réelle : r_0.	$y(t) = (C_1 + C_2 t)\,\mathrm{e}^{r_0 t}$.
$\Delta < 0$	2 solutions complexes conjuguées. $r_1 = \alpha + \mathrm{i}\beta$ et $r_2 = \alpha - \mathrm{i}\beta$	$y(t) = \left[C_1\cos(\beta t) + C_2\sin(\beta t)\right]\mathrm{e}^{\alpha t}$

2. On suppose qu'à l'instant $t = 0$, la situation est la suivante :

1. Systèmes photoniques

- le point M est situé à 20 cm du point O.
- le point M se déplace vers le point O avec une vitesse négative égale à -10 cm·s^{-1}.

a. En déduire la valeur de $f(0)$ et celle de $f'(0)$.

b. On admet que :

$$f(t) = \frac{70}{3}\mathrm{e}^{-t} - \frac{10}{3}\mathrm{e}^{-4t}.$$

Déterminer la valeur exacte de la distance OM, deux secondes après le début de la fermeture.

Le tiroir est dit fermé lorsque la distance OM est inférieure à 0,5 cm.

Le constructeur affirme que le tiroir est fermé en moins de 4 secondes.

A-t-il raison ? Justifier.

Partie B. Étude de fonction

On considère à nouveau la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(t) = \frac{70}{3}\mathrm{e}^{-t} - \frac{10}{3}\mathrm{e}^{-4t}.$$

On admet que la fonction f est dérivable et on note f' sa fonction dérivée.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f.

1. **a.** On rappelle que $\lim\limits_{u\to+\infty} \mathrm{e}^{-u} = 0$. Déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$.

b. En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ possède une asymptote dont on donnera une équation.

2. **a.** Déterminer $f'(t)$ pour tout t appartenant à $[0\,;\,+\infty[$.

b. On admet que sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ on a $f'(t) < 0$.

En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

3. On considère l'algorithme suivant :

```
t ← 0
p ← 0,1
s ← 0,5
Tant que (70/3)* e ^(- t) - (10/3)*e ^(- 4t) > s
        t ← t + p
Fin Tant que.
```

a. Recopier le tableau ci-dessous, au besoin en rajoutant des lignes, et compléter à partir de la ligne numéro 36 jusqu'a ce que l'algorithme s'arrête.

ligne	t	Valeur de $f(t)$ arrondie à 10^{-2}	Condition (70/3)* e ^(- t) - (10/3)* e^(- 4t) > s
ligne numéro 0	0	20	VRAIE
ligne numéro 1	0,1	18,88	VRAIE
ligne numéro 2	0,2	17,61	VRAIE
ligne numéro 36	3,6	…	…
ligne numéro 37	3,7	…	…
ligne numéro 38	3,8	…	…

b. Quelle est la valeur de la variable t à la fin de l'exécution de l'algorithme ?
Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

4. On note T la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
Un logiciel de calcul formel donne la partie régulière du développement limité à l'ordre deux de la fonction f au voisinage de zéro.

$f(t)$
$\rightarrow \dfrac{70}{3}\mathrm{e}^{-t} - \dfrac{10}{3}\mathrm{e}^{-4t}$
PolynômeTaylor$(f(t), t, 0, 2)$
$\rightarrow 20 - 10t - 15t^2$

a. Déterminer une équation de la tangente T.

Les questions **b.** et **c.** sont des questions à choix multiples.
Une seule réponse est exacte.
Recopier sur la copie la réponse qui vous parait exacte.
On ne demande aucune justification.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

b. Le développement limité de f à l'ordre deux au voisinage de zéro est :

$20-10t-15t^2+t^2\epsilon(t)$ Avec $\lim\limits_{t\to 0}\epsilon(t)=0$	$20-10t-18t^2+t^2\epsilon(t)$ Avec $\lim\limits_{t\to 0}\epsilon(t)=0$	$20-10t-15t^2\epsilon(t)$ Avec $\lim\limits_{t\to 0}\epsilon(t)=0$	$-15t^2+t^2\epsilon(t)$ Avec $\lim\limits_{t\to 0}\epsilon(t)=0$

c. On s'intéresse à la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la tangente T au voisinage de 0.
On peut affirmer que :

La courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de la tangente T	La courbe $\mathscr{C}$ est en dessous de la tangente T.

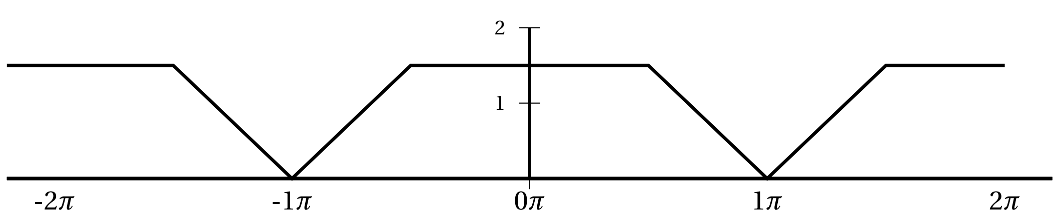
Exercice 2 **9 points**

Un formulaire sur les séries de Fourier est placé à la fin de l'exercice.

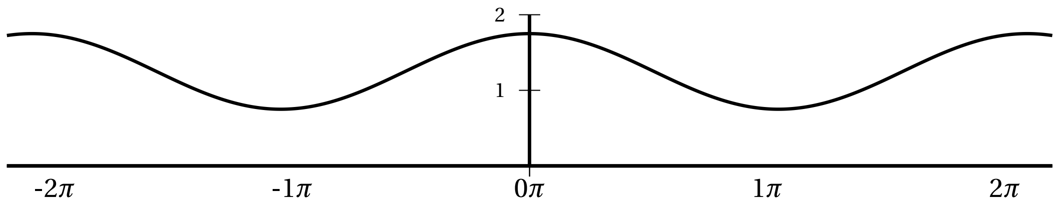
On considère une fonction f pour laquelle on dispose des informations suivantes :

- f est périodique de période $T = 2\pi$;
- f est paire.
- $f(t) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & ; \quad \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ \pi - t & ; \quad \text{si } \dfrac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \pi \end{cases}$

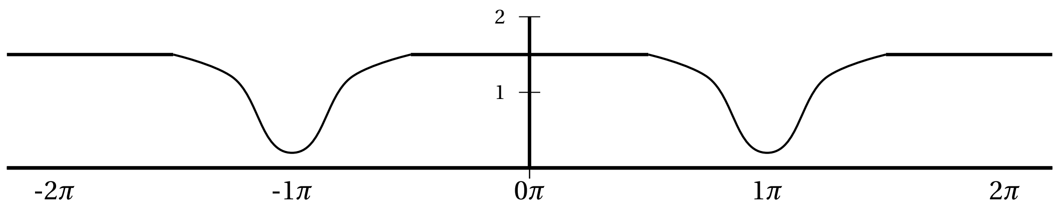
1. **Sur le document-réponse**, tracer la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle $[-2\pi\ ;\ 2\pi]$.
2. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a : $b_n = 0$.
3. On note ω la pulsation associée à la fonction f.
   Déterminer ω.
4. Démontrer que $a_0 = \dfrac{3\pi}{8}$.
5. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a :
$$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(nt)\,\mathrm{d}t + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi - t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t.$$
6. On admet que l'on a :
$$a_n = \frac{2}{\pi n^2}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \cos(n\pi)\right].$$
   Déterminer les valeurs exactes de a_1, a_2. et a_3.
7. En déduire que l'on a :
$$s_3(t) = \frac{3\pi}{8} + \frac{2}{\pi}\cos(t) - \frac{1}{\pi}\cos(2t) + \frac{2}{9\pi}9\cos(3t).$$
8. Indiquer, sans justifier, quelle est, parmi les trois courbes ci-après, celle qui est associée à la fonction s_3.



Courbe n° 1



Courbe n° 2



Courbe n° 3

9. **a.** On note $P = (a_0)^2 + \dfrac{1}{2}\left[(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2\right]$.

Donner une valeur approchée de P à 10^{-4}.

b. On note F la valeur efficace de la fonction f.

On admet que $F^2 = \dfrac{\pi^2}{6}$.

On sait que P constitue une approximation de F^2.

On cherche à déterminer le pourcentage d'erreur de cette approximation.

Cette question est une question à choix multiples.
Une seule réponse est exacte.
Recopier sur la copie la réponse qui vous parait exacte.
On ne demande aucune justification.

Le pourcentage d'erreur de cette approximation est égal à :

0,1 %	1 %	10 %

Exercice 3 **3 points**

On s'intéresse à un magasin de vélos.

Le magasin décide de prêter gratuitement pendant un jour des vélos à des clients dans l'espoir que cela débouche sur une vente.

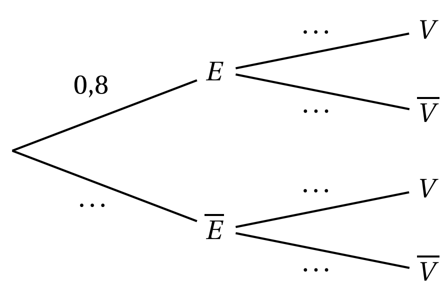
- 80 % des vélos prêtés sont des vélos électriques.
  → Cela débouche sur une vente dans 60 % des cas.
- 20 % des vélos prêtés sont des vélos mécaniques.
  → Cela débouche sur une vente dans 70 % des cas.

On choisit au hasard l'un des vélos prêtés. On considère les évènements suivants :

E : « il s'agit d'un vélo électrique »

V : « le prêt débouche sur une vente ».

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre décrivant la situation.
2. Déterminer la probabilité $p(E \cap V)$.
3. Démontrer que la probabilité que le prêt débouche sur une vente est égale à $0,62$.
4. On considère un vélo pour lequel le prêt a débouché sur une vente.
   Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un vélo électrique ? Arrondir à 10^{-3}.



Formulaire sur les séries de Fourier

f est une fonction périodique de période T et de pulsation $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.

Développement en série de Fourier de la fonction f :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right].$$

$$s_n(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{n} \left[a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right].$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t.$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t \quad (n \geqslant 1).$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t \quad (n \geqslant 1).$$

→ Lorsque la fonction f est paire, on a :

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t. \quad (n \geqslant 1).$$

DOCUMENT–RÉPONSE

(À rendre avec la copie)

EXERCICE 2

Question 1.