

♧ Brevet de Technicien Supérieur – Métropole ♧

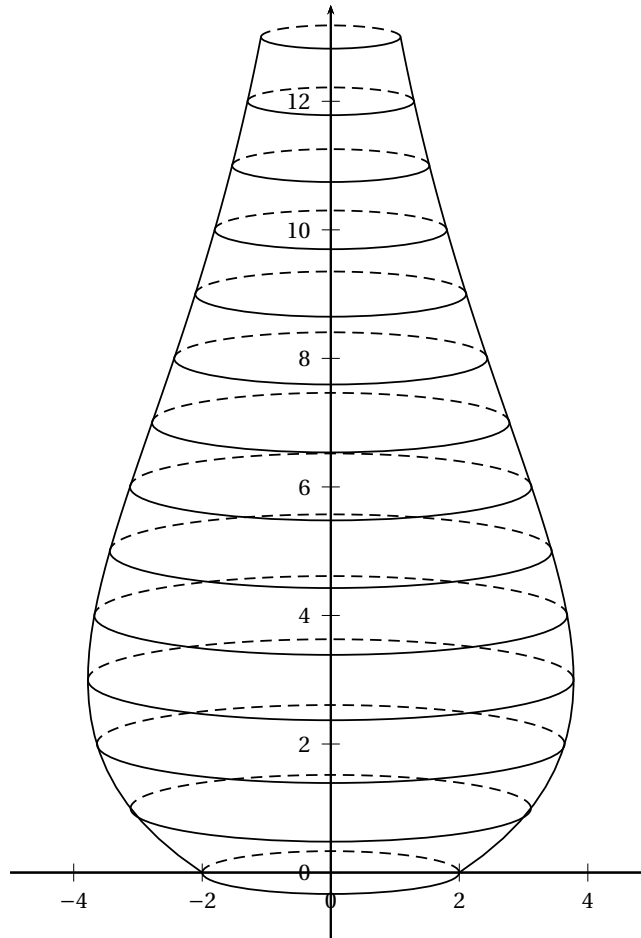
16 mai 2022 – Groupement C1 – Durée : 2 heures

A. P. M. E. P.

**Exercice 1**

**9 points**

Une entreprise réalise par tournage des pieds de lit en bois. La hauteur du pied est de 13 cm et sa base a pour diamètre 4 cm.



**Les trois parties sont indépendantes.**

**Partie A : Résolution d'une équation différentielle**

**Rappels**

Équations	Solutions sur un intervalle $I$
Équation différentielle : $ay'' + by' + cy = 0$	Si $\Delta > 0$ : $y(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ où $r_1$ et $r_2$ sont les solutions de l'équation caractéristique.
Équation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0$ de discriminant $\Delta$ .	Si $\Delta = 0$ : $y(t) = (\lambda t + \mu) e^{rt}$ où $r$ est la solution double de l'équation caractéristique.

On considère l'équation différentielle (E) :

$$16y'' + 8y' + y = 0$$

où  $y$  désigne une fonction de la variable  $x$  définie et dérivable deux fois sur  $\mathbb{R}$ .

1. Résoudre l'équation  $16r^2 + 8r + 1 = 0$ .
2. Résoudre l'équation différentielle (E) :  $16y'' + 8y' + y = 0$ .
3. Déterminer la fonction  $g$  solution de (E) qui vérifie  $g(0) = 2$  et  $g'(0) = 1.5$ .

### Partie B : Étude de fonction

Pour modéliser ce pied de lit, on effectue la rotation autour de l'axe des abscisse sur l'intervalle  $[0 ; 13]$  de la courbe représentative d'une fonction  $f$  définie par

$$f(x) = (ax + b) e^{-0,25x}$$

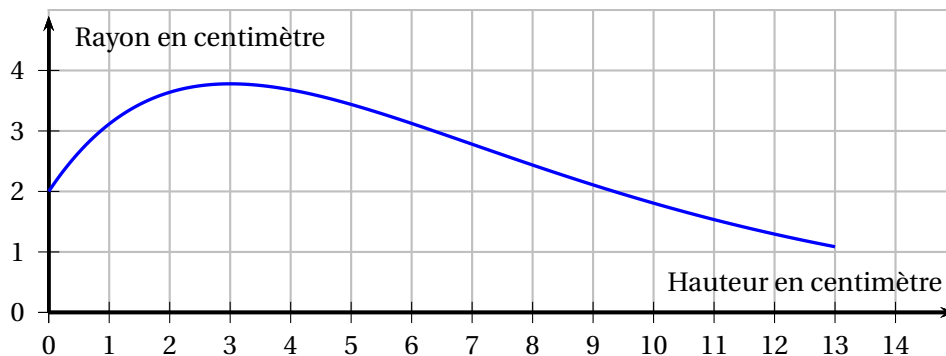
où  $a$  et  $b$  sont des nombres réels.

L'abscisse  $x$  représente la hauteur à partir du sol en centimètre du pied de lit et l'image  $f(x)$  le rayon en centimètre du pied de lit à la hauteur  $x$ .

Pour assurer la stabilité du lit, on a les contraintes suivantes :

- La courbe, notée  $C_f$ , passe par le point A (0 ; 2).
- Le coefficient directeur de la tangente à la courbe en A doit être égal à 1,5

1. Justifier que  $b = 2$ .
2. Donner l'expression de  $f'(x)$  en fonction de  $a$  et de  $x$ .
3. Déterminer la valeur de  $a$ .
4. Pour sa production de pieds de lit, l'entreprise utilise comme modèle la courbe ci-dessous, représentative de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = (2x + 2) e^{-0,25x}$  sur l'intervalle  $[0 ; 13]$ .



Le rayon de la partie bombée correspond à la valeur maximale de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0 ; 13]$ .

Peut-on utiliser un morceau de bois de largeur 5 cm, de longueur 15 cm et de hauteur 7 cm pour construire un pied de lit ?

Justifier la réponse à l'aide d'une lecture graphique. Puis à l'aide d'un calcul.

**Partie C : Calcul intégral**

Pour modéliser un pied de lit, on considère la fonction définie par

$$f(x) = (2x + 2) e^{-0,25x} \text{ sur l'intervalle } [0 ; 13].$$

On rappelle que le volume du solide engendré par la rotation de la courbe  $C_f$  autour de l'axe des abscisses sur l'intervalle  $[0 ; 13]$  est donné, en  $\text{cm}^3$ , par la formule :

$$V = \int_0^{13} \pi [f(x)]^2 dx.$$

À l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée du volume du pied de lit arrondi au dixième de  $\text{cm}^3$ .

**Exercice 2****11 points****Partie A : probabilités conditionnelles**

Une entreprise réalise des pièces en bois avec deux machines, notées A et B, qui fabriquent respectivement 60% et 40% de toute la production.

On sait que 3% des pièces produites par la machine A sont défectueuses, alors que seulement 2% des pièces produites par la machine B sont défectueuses. On choisit au hasard une pièce dans la production.

On définit les évènements suivants :

- A : « la pièce a été fabriquée par la machine A »,
- B : « la pièce a été fabriquée par la machine B »,
- D : « la pièce est défectueuse ».

1. Donner les probabilités  $P_A(D)$  et  $P_B(D)$ .
2. Calculer la probabilité que la pièce soit défectueuse et ait été produite par la machine A.
3. Calculer la probabilité que la pièce soit défectueuse.

**Partie B : lois de probabilités**

Un magasin commercialise ces pièces de bois fabriquées par l'entreprise. On admet que la probabilité qu'une pièce, prise au hasard dans la production, présente un défaut de fabrication est de 0,026.

Le magasin commande un lot de 400 pièces. La production de l'entreprise est suffisamment importante pour considérer ce lot comme un tirage successif avec remise de 400 pièces.

On note  $X$  la variable aléatoire qui, à tout lot de 400 pièces, associe le nombre de pièces présentant un défaut de fabrication.

1. Déterminer la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire  $X$  ainsi que ses paramètres.
2. Calculer la valeur arrondie à  $10^{-3}$  de la probabilité d'avoir, dans un lot, au plus 6 pièces présentant un défaut de fabrication.

3. Montrer que la probabilité d'avoir, dans un lot, au moins 7 pièces présentant un défaut de fabrication est 0,896 arrondie à  $10^{-3}$ .
4. On admet qu'on peut approcher la loi suivie par la variable  $X$  par une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ . On appelle  $Y$  la variable qui suit cette loi de Poisson. Justifier que  $\lambda = 10,4$ .
5. Déterminer la valeur arrondie à  $10^{-3}$  de l'erreur commise par cette approximation sur le résultat obtenu à la question 3.

### Partie C : test d'hypothèse

La scierie qui fournit l'entreprise en morceaux de bois affirme que 85 % de ceux-ci, pris au hasard dans la production, sont conformes en largeur et en longueur. L'entreprise doute de cette affirmation et commande un test d'hypothèse bilatéral au risque de 5 % pour vérifier si la proportion  $p$  de morceaux de bois conformes est bien de 0,85.

On note ( $H_0$ ) : «  $p = 0,85$  ».

On note  $F$  la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 100 morceaux de bois prélevés au hasard dans la production de la scierie, associe la fréquence de morceaux conformes en largeur et en hauteur. On admet que, sous  $H_0$ , la variable aléatoire  $F$  suit la loi normale de moyenne 0,85 et d'écart-type  $\sqrt{\frac{0,85(1-0,85)}{100}}$ .

1. Préciser l'hypothèse alternative  $H_1$  du test.
2. Déterminer la zone d'acceptation du test. On arrondira les valeurs à  $10^{-2}$ .
3. Sur un échantillon de 100 morceaux de bois, on a, après mesures, compté 80 morceaux conformes en largeur et en hauteur. En appliquant la règle de décision du test d'hypothèse, peut-on dire que l'entreprise a raison de douter de l'affirmation de la scierie?