Brevet de technicien supérieur Métropole [1]

15 mai 2023 - Groupement C1

Durée : 2 heures

Exercice 1 **11 points**

L'apparition des fibres de carbone a révolutionné le monde des équipements sportifs. Leur diversité a permis de multiples applications.

Partie A : deux exemples

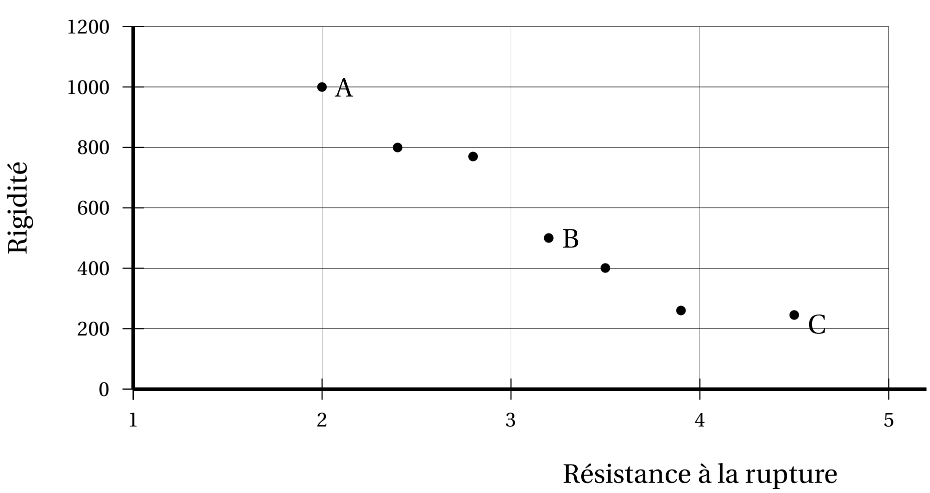
Une société produit sept types de fibres de carbone catalogués selon deux caractéristiques :

— leur rigidité, graduée sur une échelle de 1 (le moins rigide) à 1 000 (le plus rigide),

— leur résistance à la rupture, graduée sur une échelle de 1 (le moins résistant) à 5 (le plus résistant).

Le graphique suivant positionne les types de fibres fabriqués par cette société selon leurs caractéristiques.

Caractéristique des fibres de carbone



1. Conception des processus de découpe et d'emboutissage, Conception des processus de réalisation de produits (2 options), Conception et réalisation en chaudronnerie industrielle, Conception et industrialisation en construction navale, Développement et réalisation bois, Fonderie, Forge, Industries céramiques, Innovation textile (2 options), Maintenance des matériels de construction et de manutention, Maintenance des véhicules (3 options), Moteur à combustion interne, Pilotage des procédés, Systèmes constructifs bois et habitat, Techniques et services en matériels agricoles

Les deux questions suivantes sont des questionnaires à choix multiple.
Une seule réponse est correcte.
Indiquer sur la copie la réponse correcte. On ne demande aucune justification.
La réponse correcte rapporte un point.
Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

1. Cette société est sollicitée pour la fabrication d'un cadre de vélo de route très rigide destiné à la compétition de haut niveau.

   Parmi les trois types de fibres suivants, positionnés sur le graphique, quel est le type de fibre à privilégier pour cette commande ?

   a. Type A **b.** Type B **c.** Type C

2. Quel est le type de fibres à choisir si la demande concerne la fabrication d'une canne à pêche destinée aux poissons très combatifs pour lesquels la canne ne doit pas rompre ?

   a. Type A **b.** Type B **c.** Type C

Partie B : création d'une nouvelle fibre de type intermédiaire

On veut produire de nouveaux types de fibres aux qualités intermédiaires offrant un compromis entre les deux caractéristiques.
Le tableau suivant donne les caractéristiques des différents types de fibres fabriqués jusqu'à présent par cette société :

Résistance à la rupture x_i	2	2,2	2,8	3,2	3,5	3,9	4,5
Rigidité y_i	1 000	800	750	500	400	280	250

On réalise un ajustement affine du nuage de points associé à la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$.

1. À l'aide de la calculatrice, déterminer une équation de la droite de régression de y en x ainsi que le coefficient de corrélation linéaire associé. Les résultats seront arrondis à 0,01 près.
2. On admet que l'ajustement affine de y en x est donné par l'équation :

$$y = -306,4x + 1\,536,1.$$

   a. Quelle valeur de rigidité, arrondie à l'entier près, cet ajustement affine permet-il de prévoir pour une résistance à la rupture égale à 3 ?

   b. Quelle résistance à la rupture, arrondie à 0,1 près, correspondrait à une rigidité égale à 650 ?

Partie C : fabrication d'un cadre

La fabrication d'un cadre de vélo de compétition nécessite la cuisson d'un mélange composé d'une fibre de carbone et d'un polymère. Le mélange est porté à une température de 120 °C pendant 1 heure. On laisse ensuite refroidir l'ensemble à une température ambiante de 22 °C.

On appelle f la fonction, définie sur $[0~;~+\infty[$ donnant la température en degré Celsius (°C) du mélange en fonction du temps t exprimé en minute à partir de la mise à température ambiante.
On admet que f est solution de l'équation différentielle suivante :

$$(E) : \quad y' + 0{,}08y = 1{,}76$$

où y désigne une fonction dérivable sur $[0~;~+\infty[$ et y' sa fonction dérivée.

1. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E_0) : $\quad y' + 0{,}08y = 0$.
2. Déterminer le réel a tel que la fonction g, définie sur $[0~;~+\infty[$ par $g(t) = a$, soit une solution particulière de l'équation (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. En utilisant le fait que $f(0) = 120$, déterminer, pour tout $t \in [0~;~+\infty[$, l'expression de $f(t)$.

Dans la suite de l'exercice on considère que, pour tout $t \in [0~;~+\infty[$, $f(t) = 98\,\mathrm{e}^{-0{,}08t} + 22$.

5. Calculer le temps, arrondi à la minute près, au bout duquel la température du mélange est de 42 °C.

Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants que l'on admet et qui pourront être exploités dans la question 6 et 7.

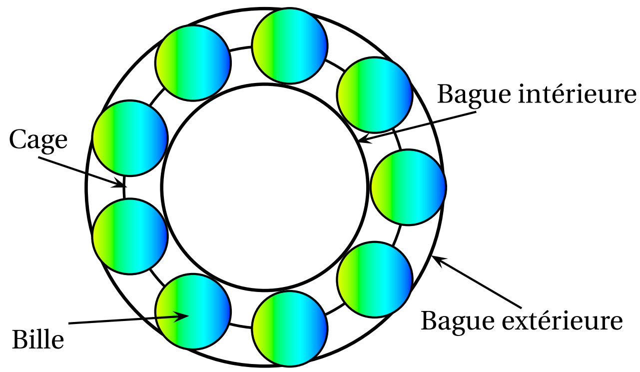
$f(t) := 98 * \exp(-0.08 * t) + 22$
$t \mapsto 98\mathrm{e}^{-0{,}08t} + 22$
Dériver$(f(t), t)$
$t \mapsto -7{,}84\mathrm{e}^{-0{,}08t}$
Intégrer$(f(t), t)$
$t \mapsto -1\,225\mathrm{e}^{-0{,}08t} + 22t$

6. Déterminer le signe de $f'(t)$ pour tout $t \in [0~;~+\infty[$.
   En déduire le sens de variation de f.
   En quoi ce résultat est-il cohérent avec le contexte de l'exercice ?
7. Calculer la température moyenne T_m arrondie au degré près, du mélange durant les 20 premières minutes de refroidissement.
   On rappelle que la valeur moyenne d'une fonction h sur un intervalle $[a~;~b]$ est
   $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 2 — 9 points

Lors de la conception d'un vélo destiné à la performance, la qualité des roulements à billes intervenant au niveau des moyeux et du pédalier est primordiale.

L'apparition des roulements à billes en céramique a permis d'offrir un coefficient de friction réduit et une masse globale plus faible par rapport à des roulements en acier.
Leur fragilité, cependant, n'est pas compatible avec la pratique cycliste. Ceci amène finalement à utiliser des roulements hybrides avec des billes en céramique et des bagues en acier.



Partie A : fabrication des bagues

La fabrication des bagues en acier nécessite la production de pièces cylindriques.
On admet que la variable aléatoire D qui mesure le diamètre (en mm) des pièces destinées aux bagues extérieures suit la loi normale de moyenne $\mu = 42$ et d'écart-type $\sigma = 0{,}12$.
Les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.
Le contrôle de la fabrication accepte uniquement les pièces dont le diamètre est compris entre 41,8 mm et 42,2 mm.

1. Calculer la probabilité qu'une pièce de la production tirée au hasard soit acceptée.
2. On souhaite modifier le mode de fabrication pour améliorer le pourcentage de pièces acceptées en conservant la moyenne $\mu = 42$.
   Quelle valeur de σ faudrait-il pour que la probabilité qu'une pièce soit acceptée soit égale à 0,95 ?

Partie B : contrôle de la production des bagues

On suppose maintenant que 95 % des pièces sont acceptables. On prélève un échantillon de 50 pièces. La production est suffisamment grande pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 50 pièces.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 50 pièces, associe le nombre de pièces non acceptables de l'échantillon.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}05$.
2. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, qu'un échantillon de 50 pièces ne contienne que des pièces acceptables.

3. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, qu'un échantillon de 50 pièces contienne au plus deux pièces non acceptables.
4. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X, puis en donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.

Partie C : contrôle de la production des billes

L'entreprise ne fabrique pas elle-même les billes mais passe commande chez un fournisseur. Pour ce type de roulements, l'entreprise a reçu une livraison d'un grand nombre de billes en nitrure de silicium (Si_3N_4) dont la masse moyenne annoncée par le fournisseur est de 1,2 g.
La responsable qualité souhaite contrôler la valeur de la masse moyenne des billes. Elle construit pour cela un test d'hypothèse bilatéral au seuil d'erreur de 5 %.
On désigne par $\overline{M}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon aléatoire de 100 billes prélevées dans la livraison, associe la masse moyenne en gramme des billes de cet échantillon.
Le nombre de billes livrées est assez important pour que l'on puisse assimiler ces prélèvements à des tirages avec remise.
On admet que $\overline{M}$ suit une loi normale de moyenne m et d'écart-type $\sigma_0 = \dfrac{0{,}03}{\sqrt{100}} = 0{,}003$.
La responsable choisit comme hypothèse nulle H_0 : « $m = 1{,}2$ ».
Les résultats seront arrondis à 10^{-4} près.

1. Déterminer l'intervalle $I = [a\,;\,b]$ de centre 1,2 tel que, sous l'hypothèse H_0 :

$$P\left(a \leqslant \overline{M} \leqslant b\right) = 0{,}95.$$

2. Donner l'hypothèse alternative H_1.
3. Énoncer la règle de décision permettant d'utiliser ce test.
4. On prélève un échantillon de 100 billes et on observe que, pour cet échantillon, la masse moyenne est égale à 1,203 4 g.

   Peut-on, au seuil d'erreur de 5 %, conclure que la masse moyenne des billes de cette livraison est conforme à l'annonce du fournisseur ?