BTS Groupement D1 [1] – 15 mai 2023

Métropole – Antilles–Guyane – Polynésie

Durée : 2 heures

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

EXERCICE 1 **10 points**

Les deux parties de l'exercice peuvent être traitées indépendamment

Afin de vérifier la bonne isolation thermique d'un spa, on porte la température de l'eau, du spa à 38 °C puis on coupe l'alimentation électrique du spa qui sert à chauffer l'eau.
On s'intéresse à l'évolution de cette température en fonction du temps écoulé à partir de cette coupure.
La température de l'eau du spa est modélisée par une fonction f qui, à tout temps t (en heures) écoulé depuis la coupure de l'alimentation électrique, associe la température $f(t)$, en degré Celsius (°C), de l'eau du spa au temps t. On admet que $f(0) = 38$.
Lors de cette vérification, la température ambiante extérieure au spa reste constante et égale à 25 °C. On remarque que la température de l'eau du spa est de 37 °C au bout de 1,5 h.

Partie A

On admet que la fonction f est la solution sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ de l'équation différentielle (E) d'inconnue y de la variable réelle t :

$$y' + 0{,}05y = 1{,}25$$

et qui vérifie la condition $f(0) = 38$.

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle

$$y' + 0{,}05y = 0$$

sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

2. Déterminer sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ une fonction constante solution particulière de l'équation différentielle (E).
3. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E) : $y' + 0{,}05y = 1{,}25$.
4. Montrer que, pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$,

$$f(t) = 13\mathrm{e}^{-0{,}05t} + 25.$$

1. Analyses de biologie médicale, Bio analyses et contrôles, Biotechnologies, Europlastics et composites, Bio-qualité

Partie B

On admet que, pour tout réel t de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$,

$$f(t) = 13\mathrm{e}^{-0,05t} + 25.$$

1. Calculer la valeur arrondie à 10^{-1} de $f(24)$.
Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

2. **a.** Pour tout réel t de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, déterminer une expression de $f'(t)$.

b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
Ce sens de variation paraît-il cohérent avec le contexte de l'exercice ?
Argumenter.

3. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

b. Interpréter la valeur de cette limite dans le contexte de l'exercice.

4. Une alarme sonore est émise quand la température de l'eau du spa devient strictement inférieure à une température programmée par l'utilisateur.

a. L'utilisateur programme la température de l'eau du spa à 36 °C.
Déterminer, par le calcul, combien de temps après la coupure de l'alimentation électrique cette alarme sonore retentira.
On donnera la valeur exacte de cette durée, puis la valeur arrondie à la minute.

b. Quelle est la valeur numérique affichée par l'algorithme ci-dessous ?

```
H ← 0
T ← 38
Tant que T ⩾ 34
    H ← H + 1
    T ← 13e^(−0,05H) + 25
Fin du tant que
Afficher H
```

c. Expliquer ce que cet algorithme permet de déterminer dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 2 **10 points**

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes

Une minoterie (établissement qui fabrique des farines de céréales) reçoit chaque jour des camions de blé. Ce blé est destiné à être transformé en farine. La farine fabriquée est ensuite vendue à des boulangers industriels ou à des artisans boulangers.

Partie A

Dans la minoterie, on procède à deux contrôles qualité à l'arrivée d'une livraison de blé : l'un sur l'extensibilité d'une pâte obtenue à partir de la farine fabriquée avec un échantillon du blé livré, l'autre sur le taux d'humidité du blé livré.

1. Un technicien broie une quantité de blé représentatif d'une livraison. Il obtient une farine, avec laquelle il fabrique cinq échantillons de quantité identique de pâte. Il mesure l'indice d'extensibilité, en mm, de chacun de ces échantillons.
   Voici les résultats obtenus :

	Indice d'extensibilité en mm
Échantillon n$^{\text{o}}$ 1	104
Échantillon n$^{\text{o}}$ 2	81
Échantillon n$^{\text{o}}$ 3	83
Échantillon n$^{\text{o}}$ 4	57
Échantillon n$^{\text{o}}$ 5	55

   a. Donner la moyenne $\overline{x}$ de cette série et son écart-type arrondi au centième.

   b. Dans cette question, on considère que l'écart-type de la série est $\sigma = 18$ mm.

   Le processus qualité impose de procéder à un test sur cinq nouveaux échantillons de pâte si l'une des cinq valeurs de la série précédente est en dehors de l'intervalle $\left[\overline{x} - 2\sigma\ ;\ \overline{x} + 2\sigma\right]$.

   Vérifier que le technicien n'a pas besoin de procéder à un test sur cinq nouveaux échantillons de pâte.

2. Deux camions, en provenance d'une même exploitation agricole, sont arrivés. Le technicien utilise un humidimètre qui indique le taux d'humidité, mesuré en pourcentage, du blé livré dans chaque camion :

   — le premier contient 29 540 kg de blé présentant un taux d'humidité global de 12,4 % ;

   — le second contient 14 540 kg de blé présentant un taux d'humidité global de 14,1 %.

   Le cahier des charges exige un taux d'humidité inférieur à 13 % dans un même silo.

   Lors du déchargement des deux camions dans un même silo, les blés seront mélangés.

   Montrer que le technicien peut autoriser le déchargement des deux camions dans un même silo vide.

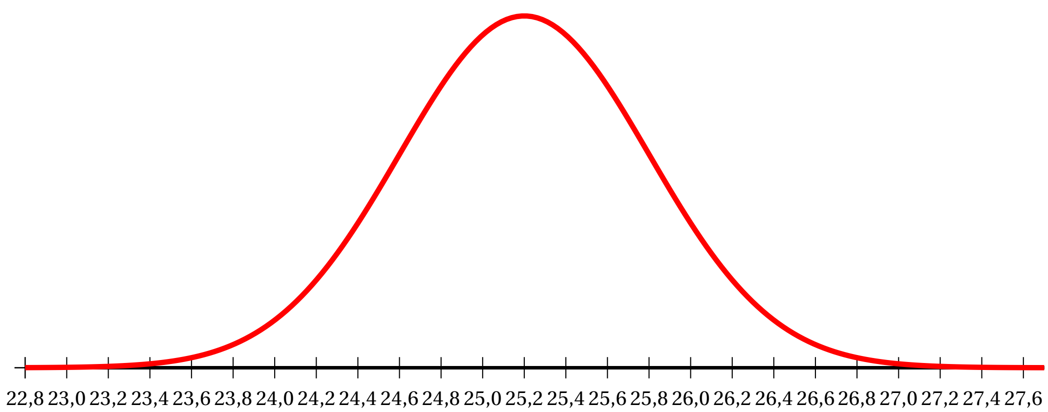
Partie B

La farine fabriquée par la minoterie est conditionnée dans des sacs destinés à être vendus aux boulangers.
On note X la variable aléatoire qui, à chaque sac de farine, associe son poids en kg.
On admet que la variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne 25,2 kg et d'écart-type 0,1.
On prélève un sac au hasard dans la production.

1. Un sac ne peut pas être vendu s'il a une masse inférieure à 25 kg.
   Quelle est la probabilité, à 10^{-3} près, pour que ce sac ait une masse inférieure à 25 kg ?
2. **a.** Donner un réel h tel que : $P(25{,}2 - h \leqslant X \leqslant 25{,}2 + h) \approx 0{,}95$ à 10^{-2} près.

   b. On a tracé ci-dessous la représentation graphique d'une fonction de densité.

   Expliquer pourquoi cette représentation ne peut pas être celle de la fonction de densité de la variable aléatoire X.



Partie C

Un commercial de la minoterie présente à ses clients une nouvelle farine appelée *La Romaine*. On dispose des données suivantes :

- 70 % des clients de la minoterie sont des artisans boulangers, les autres sont des boulangers industriels ;
- parmi les artisans boulangers, 38 % acceptent de tester la farine *La Romaine* ;
- parmi les boulangers industriels, 25 % acceptent de tester la farine *La Romaine*.

On choisit un client de la minoterie au hasard.
On note A l'évènement « le client est un artisan boulanger » et T l'évènement « le client accepte de tester la farine *La Romaine* ».

1. Représenter la situation décrite par un arbre pondéré.
2. **a.** Calculer la probabilité de l'évènement « le client est un artisan boulanger et il accepte de tester la farine *La Romaine* ».
   b. Montrer que la probabilité de l'évènement « le client accepte de tester la farine *La Romaine* »est égale à 0,341.
3. Un client ayant testé la farine *La Romaine* reprend contact avec le commercial de la minoterie.
   Quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-3}, que ce soit un artisan boulanger ?
4. On choisit au hasard 200 clients de la minoterie. Les clients de la minoterie sont suffisamment nombreux pour assimiler ce choix à un tirage avec remise.
   On note Y la variable aléatoire qui, à un échantillon de 200 clients, associe le nombre de clients qui ont testé la farine *La Romaine*.
   On admet que la variable aléatoire Y suit la loi binomiale de paramètres n et p, avec $n = 200$ et $p = 0,341$.
   a. Quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-3}, qu'au plus 60 des 200 clients choisis aient testé la farine *La Romaine* ?
   b. Calculer l'espérance de la variable aléatoire Y et interpréter dans le contexte de l'exercice.