

∞ Brevet de technicien supérieur ∞
Groupement A1 session 2005
Métropole – Polynésie

A. P. M. E. P.

Exercice 1

9 points

Spécialités CIRA, Électronique, Électrotechnique, Génie optique et TPIL

1. Soit la fonction numérique g définie sur $[0; \pi]$ par

$$g(t) = (1 + \cos^2 t) \sin^2 t.$$

- a. Montrer que $g'(t) = 4 \sin t \cos^3 t$.
 - b. En déduire les variations de g sur $[0; \pi]$.
2. Soit la fonction numérique f définie sur \mathbb{R} , paire, périodique de période 1 telle que :

$$\begin{cases} f(t) = \frac{1}{2} - \tau & \text{si } 0 \leq t < \tau \\ f(t) = -\tau & \text{si } \tau \leq t \leq \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{où } \tau \text{ est un nombre réel tel que } 0 < \tau < \frac{1}{2}$$

- a. *Uniquement dans cette question, on prendra $\tau = \frac{1}{6}$.*
Représenter la fonction f sur l'intervalle $[-1; 1]$ dans un repère orthonormal.
- b. On admet que la fonction f satisfait aux conditions de Dirichlet.
Soit S le développement en série de Fourier associé à la fonction f .
Montrer que :

$$S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\pi} \sin(2n\pi\tau) \cos(2n\pi t).$$

3. On décide de ne conserver que les harmoniques de rang inférieur ou égal à 2.
Soit la fonction numérique h définie sur \mathbb{R} par :

$$h(t) = \frac{1}{\pi} \sin(2\pi\tau) \cos(2\pi t) + \frac{1}{2\pi} \sin(4\pi\tau) \cos(4\pi t)$$

On désigne par E_h^2 le carré de la valeur efficace de h sur une période.

- a. À l'aide de la formule de Parseval, déterminer E_h^2 .
 - b. Montrer que $E_h^2 = \frac{1}{2\pi^2} g(2\pi\tau)$.
4. Déterminer la valeur de τ rendant E_h^2 maximal.

Exercice 2

11 points

Toutes spécialités

L'exercice est composé de deux parties qui peuvent se traiter de façon indépendante.

Partie A

Un embrayage vient appliquer, à l'instant $t = 0$, un couple résistant constant sur un moteur dont la vitesse à vide est de 150 rad/s.

On note $\omega(t)$, la vitesse de rotation du moteur à l'instant t .

La fonction ω est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{1}{200}y'(t) + y(t) = 146 \quad (1)$$

où y désigne une fonction dérivable de la variable réelle positive t .

1. a. Déterminer la solution générale de l'équation différentielle (1).
On cherchera une solution particulière constante.
- b. Sachant que $\omega(0) = 150$, montrer que $\omega(t) = 146 + 4e^{-200t}$ pour tout $t \in [0; +\infty[$.
2. a. On note $\omega_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} \omega(t)$.
Déterminer la perte de vitesse $\omega(0) - \omega_\infty$ due au couple résistant.
- b. On considère que la vitesse du moteur est stabilisée lorsque l'écart relatif $\left| \frac{\omega(t) - \omega_\infty}{\omega_\infty} \right|$ est inférieur à 1%.
Calculer le temps mis par le moteur pour stabiliser sa vitesse.
On donnera la valeur exacte et la valeur arrondie au millième.

Partie B

La vitesse du moteur étant stabilisée, on s'intéresse dans cette deuxième partie à l'effet d'une perturbation γ du couple résistant sur la vitesse de rotation du moteur. On note $f(t)$ la différence, à l'instant t , entre la vitesse perturbée du moteur et sa vitesse stabilisée.

La fonction f est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{1}{200}f'(t) + f(t) = \gamma(t) \text{ avec } f(0^+) = 0 \quad (2)$$

On admet que la fonction f possède une transformée de Laplace notée F .

La fonction γ est définie par :

$$\gamma(t) = K[U(t) - U(t - \tau)]$$

où τ et K sont des réels strictement positifs caractérisant la perturbation et U est la fonction échelon unité ($U(t) = 0$ si $t < 0$ et $U(t) = 1$ si $t \geq 0$).

1. a. Représenter la fonction γ pour $\tau = 0,005$ et $K = 0,2$.
- b. Déterminer, en fonction de τ et K , la transformée de Laplace Γ de la fonction γ .
2. En appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de l'équation différentielle (2), déterminer $F(p)$.
3. a. Déterminer les réels a et b tels que :

$$\frac{200}{p(p+200)} = \frac{a}{p} + \frac{b}{p+200}$$

pour tout réel p strictement positif.

- b. En déduire l'original f de la fonction F . On vérifiera notamment que :

$$\begin{cases} f(t) = K(1 - e^{-200t}) & \text{si } t \in [0; \tau[\\ f(t) = K(e^{200\tau} - 1)e^{-200t} & \text{si } t \in [\tau; +\infty[\end{cases}$$

- c.** Donner le sens de variation de la fonction f sur chacun des intervalles $[0 ; \tau[$ et $[\tau ; +\infty[$.
Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de ces deux intervalles.
- d.** Représenter la fonction f pour $\tau = 0,005$ et $K = 0,2$.
On pourra tracer les courbes représentatives des fonctions γ et f dans le même repère.