Brevet de technicien supérieur session 2007 Nouvelle–Calédonie Groupement B

Exercice 1 10 **points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

Une usine fabrique un très grand nombre de billes en acier spécial destinées à un certain type de roulement.

Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3}.

A- Loi normale

Une bille est conforme lorsque sa masse, exprimée en grammes, appartient à l'intervalle $[14,92\ ;\ 15,08]$.

1. On noie M la variable aléatoire qui, à chaque bille prélevée au hasard dans la production, associe sa masse. On suppose que la variable aléatoire M suit la loi normale de moyenne 15 et d'écart type $0,05$.
   Calculer la probabilité qu'une bille prélevée au hasard dans la production soit conforme.
2. La qualité de la production de billes étant jugée insuffisante, on effectue un réglage.
   On note M_1 la variable aléatoire qui, à chaque bille prélevée dans la nouvelle production future, associe sa masse. On suppose que la variable aléatoire M_1, suit une loi normale de moyenne 15 et d'écart type σ_1.
   On admet que la probabilité qu'une bille prélevée au hasard dans la nouvelle production soit conforme est alors égale à $0,99$.
   Déterminer σ_1.

B. Loi binomiale et approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

On note E l'évènement : « une bille prélevée au hasard dans un stock important est défectueuse ».
On suppose que $P(E) = 0,01$.
Les roulements fabriqués avec ce type de billes contiennent 36 billes.
On prélève au hasard 36 billes dans un stock suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 36 billes.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement ainsi défini associe le nombre de billes de ce prélèvement qui sont défectueuses.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. **a.** Déterminer la probabilité qu'il n'y ait aucune bille défectueuse dans un tel prélèvement.
   b. Déterminer la probabilité qu'il y ait au plus deux billes défectueuses dans un tel prélèvement.
3. **a.** On considère que la loi suivie par la variable aléatoire X peut être approchée par une loi de Poisson.
   Déterminer le paramètre λ de cette loi de Poisson.

b. On désigne par Y une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ, où λest la valeur obtenue au **a.**.

En utilisant cette loi de Poisson, calculer la probabilité qu'il y ait au plus deux billes défectueuses dans un tel prélèvement.

C. Test d'hypothèse

Pour la fabrication des roulements, les billes doivent peser 15 grammes.
On se propose de construire un test d'hypothèse bilatéral pour contrôler la moyenne m de l'ensemble des masses, en grammes, d'une importante livraison destinée au montage de roulements.
On note Z la variable aléatoire qui à chaque bille prélevée au hasard dans la livraison associe sa masse.
La variable aléatoire Z suit la loi normale de moyenne inconnue m et d'écart type $0,05$.
On désigne par $\overline{Z}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon aléatoire de 36 pièces prélevé dans la livraison, associe la moyenne des masses des billes de cet échantillon. La livraison est assez importante pour que l'on puisse assimiler ces prélèvements à des tirages avec remise.
L'hypothèse nulle est $H_0\ :\ m = 15$.
L'hypothèse alternative est $H_1\ :\ m \neq 15$.
Le seuil de signification du test est fixé à $0,05$.

1. Énoncer la règle de décision permettant d'utiliser ce test en admettant, sous l'hypothèse nulle H_0, le résultat suivant, qui n'a pas à être démontré.

$$P(14,984 \leqslant \overline{Z} \leqslant 15,016) = 0,95.$$

2. On prélève un échantillon aléatoire de 36 billes dans la livraison et on calcule la moyenne des masses des billes de cet échantillon.

On obtient $\overline{x} = 15,025$.

Peut-on conclure, au seuil de risque de 0,05 que la livraison est conforme pour la masse ?

Exercice 2 10 **points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$\text{(E)} \quad : \qquad y' - y = -\frac{4\mathrm{e}^{2x}}{(\mathrm{e}^{x}+1)^2}$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et y' la fonction dérivée de y.

1. Déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E_0)\ : y' - y = 0$.

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{4\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}+1}$.

Démontrer que la fonction g est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

B. Étude locale d'une fonction

On rappelle que g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{4\text{e}^x}{\text{e}^x + 1}$ et on note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de g dans un repère orthogonal.

On admet que le développement limite à l'ordre 3 de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\text{e}^x + 1}$ au voisinage de 0 est :

$$\frac{1}{\text{e}^x + 1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{48}x^3 + x^3\epsilon(x) \text{ avec} \lim_{x \to 0} \epsilon(x) = 0.$$

(Ce résultat n'a pas à être démontré).

1. Démontrer que le développement limité à l'ordre 3 de la fonction g au voisinage de 0 est

$$g(x) = 2 + x - \frac{x^3}{12} + x^3\epsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \to 0} \epsilon(x) = 0.$$

2. En déduire une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 et la position relative de T et $\mathscr{C}$ au voisinage de ce point.

C. Calcul intégral

1. On note $I = \displaystyle\int_0^1 g(x)\,\text{d}x$.

a. Démontrer que $I = 4\ln \dfrac{\text{e} + 1}{2}$.

b. Donner la valeur approchée arrondie à 10^{-3} de I.

2. On note $J = \displaystyle\int_0^1 \left(2 + x - \frac{x^3}{12}\right)\text{d}x$.

a. Démontrer que $J = \dfrac{119}{48}$. 48

b. Donner la valeur approchée arrondie à 10^{-3} de J.

c. Vérifier que les valeurs approchées de I et de J obtenues au 1. b. et au 2. b. diffèrent de $0,001$.