

Brevet de technicien supérieur Métropole session 13 mai 2014 - groupement C

A. P. M. E. P.

Exercice 1

10 points

Dans le cadre d'une étude de sécurisation des silos à grains, on étudie les contraintes exercées dans un silo cylindrique, de diamètre connu, contenant un matériau granulaire de masse volumique connue.

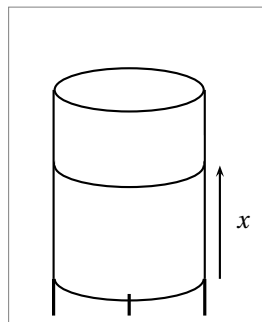
Partie 1

On s'intéresse à la fonction donnant la pression (en kilopascals) exercés sur le fond du silo en fonction de la hauteur x (en mètres) de grains contenus dans le silo.

On admet que cette fonction vérifie l'équation différentielle (E) :

$$(E) : y' + 0,175y = 8,365.$$

Dans cette équation, y désigne une fonction de la variable réelle x , définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$.



1. Résoudre l'équation différentielle $y' + 0,175y = 0$
2. Déterminer le réel a tel que la fonction g , définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = a$, soit une solution particulière de l'équation (E)
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la fonction p définie sur $[0; +\infty[$ solution de l'équation différentielle (E) qui vérifie $p(0) = 0$

Partie 2

On considère la fonction f définie par $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = 47,8(1 - e^{-0,175x}).$$

Cette fonction f est celle qui, à toute hauteur x de grains contenus dans le silo décrit dans le **partie 1**, associe la pression exercée sur le fond de celui-ci.

On admet, pour l'étude théorique, que l'on peut remplir indéfiniment le silo.

1. Étude théorique.
 - a. Prévoir le sens de variation de f .
 - b. Justifier par le calcul le sens de variation de f .
 - c. Démontrer que la courbe représentative \mathcal{C} de la fonction f admet une asymptote horizontale \mathcal{D} d'équation $y = 47,8$

À partir d'une certaine hauteur de grains λ , on observe un effet de voûte à l'intérieur du silo, ce qui limite la pression exercée sur le fond et provoque une augmentation de la pression sur les parois latérales. Ce phénomène explique le risque d'éclatement d'un silo trop rempli. L'étude physique montre que λ est l'abscisse du point d'intersection de la tangente T à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse 0 et de son asymptote horizontale \mathcal{D} .

2. La courbe représentative \mathcal{C} de la fonction f , dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , est fournie en annexe. Cette annexe est à rendre avec la copie.
- Déterminer graphiquement, sur l'annexe, un encadrement de λ par deux entiers consécutifs.
 - Déterminer une équation de la tangente T à \mathcal{C} au point d'abscisse 0.
 - En déduire, par le calcul, une valeur approchée de λ à 10^{-2} .

Partie 3

Calculer la pression moyenne exercée sur le fond du silo par une quantité de grains d'une hauteur variant entre 0 et 5 mètres.

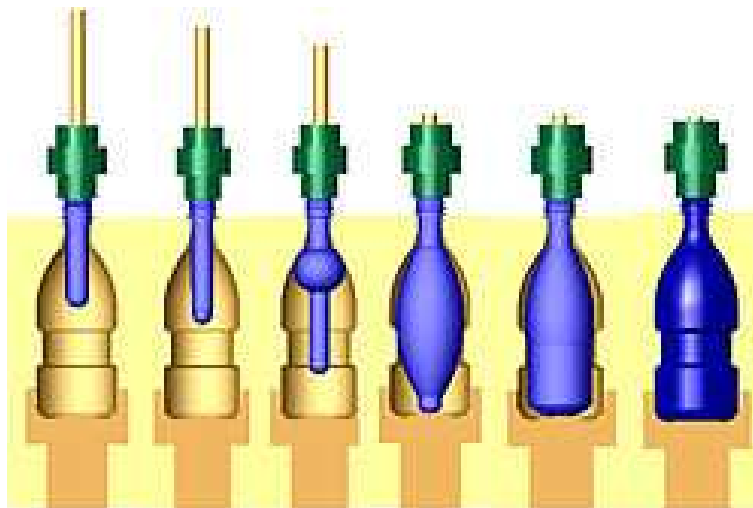
On rappelle que la valeur moyenne d'une fonction f entre les valeurs a et b est $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

Exercice 2

10 points

La fabrication des bouteilles en PET (polyéthylène téréphtalate) destinées au conditionnement des eaux minérales plates comporte trois étapes principales :

- Étape 1 : l'injection. Les granulés de PET sont ramollis sous l'effet de la chaleur. Le plastique est alors injecté dans un moule : on obtient ainsi une **préforme** qui ressemble à un tube à essais.
- Étape 2 : Les préformes sont chauffées dans un four infrarouge
- Étape 3 : Le soufflage. Une tige étire la préforme et un jet d'air la comprime contre les parois (voir figure)



Processus d'étirage-soufflage d'une préforme. (Extrait de Wikipédia)

Une société est spécialisée dans la fabrication de bouteilles d'eau plate. On effectue différents types de tests de contrôle de qualité afin de vérifier que les bouteilles sont conformes aux normes en vigueur.

Partie 1

Un premier type de test est effectué sur les préformes à l'issue de l'étape 1 de fabrication décrite ci-dessus.

On estime qu'il y a 0,5 % des préformes non conformes aux normes établies. Soit X la variable aléatoire qui, à tout lot de 80 préformes prélevées au hasard dans la production, associe le nombre de préformes non conformes. La production de la société est suffisamment importante pour que ce prélèvement soit assimilé à un tirage avec remise.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2. Calculer la probabilité qu'il y ait une seule préforme non conforme dans un lot de 80.
3. Calculer la probabilité qu'il y ait plus d'une préforme non conforme dans un lot de 80.

Partie 2

Le four infrarouge se dérègle au cours du temps. Le réglage ne pouvant être corrigé dans l'immédiat, la société désire évaluer les conséquences de ce dysfonctionnement. Elle décide de relever chaque jour, sur un échantillon, le pourcentage de bouteilles touchées par ce problème. On obtient le tableau suivant :

jour x_i	1	2	3	4	5	6
Pourcentages de bouteilles défectueuses y_i	0,8	1,3	1,4	1,7	2,1	2,2

1. Donner une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés. (Les coefficients seront arrondis à 10^{-3}).
2. On admet que l'évolution du pourcentage de bouteilles défectueuses se poursuit de la même manière dans les jours suivants. Estimer le pourcentage de bouteilles défectueuses produites le neuvième jour.

partie 3

Une série de tests, concernant entre-autres la résistance des bouteilles et l'épaisseur de matériau à utiliser, est effectuée à l'issue de l'étape de soufflage sur des échantillons de 100 bouteilles prélevées au hasard.

Chaque bouteille prélevée est placée sous un plateau de compression. Une force verticale est appliquée avec une vitesse constante provoquant la déformation de la bouteille.

Un dynamomètre permet de mesurer la charge de compression verticale, c'est-à-dire l'intensité maximale de la force exercée pendant le test jusqu'à ce que la bouteille se déforme visiblement. Elle est exprimée en Newtons.

On désigne par C la variable aléatoire qui, à toute bouteille prélevée dans la production associe la charge de compression verticale infligée lors du test.

On admet que C suit une loi normale de moyenne m et d'écart type 1.

1. Dans cette question, on suppose que $m = 30$. Une bouteille est déclarée conforme lorsque la charge de compression verticale infligée lors du test est comprises entre 28 et 32 Newtons.
Calculer la probabilité qu'une bouteille prélevée au hasard dans la production soit conforme.
2. Pour des raisons écologiques, la société vient de mettre au point un nouveau modèle de bouteille en plastique de plus faible épaisseur. On souhaite tester si les bouteilles sont toujours aussi résistantes.

On construit un test bilatéral de validité d'hypothèse, destiné à savoir si l'on peut considérer, au seuil de 5%, que la charge moyenne de compression verticale sur l'ensemble de la production de bouteilles est égale à 30 Newtons.

Soit \bar{C} la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 100 bouteilles de la production, associe la charge moyenne de compression verticale infligée lors du test.

On admet que \bar{C} suit une loi normale de moyenne m et d'écart-type 0,1.

On choisit l'hypothèse nulle H_0 : « $m = 30$ ».

- a. Donner l'hypothèse alternative H_1
- b. Sous l'hypothèse H_0 : « $m = 30$ », calculer le réel a tel que

$$P(30 - a \leq \bar{C} \leq 30 + a) = 0,95$$

- c. Énoncer la règle de décision de ce test.
- d. On prélève au hasard un échantillon de 100 bouteilles dans la production. La charge moyenne de compression verticale sur cet échantillon est de 29,4 Newtons.
Peut-on conclure, au seuil de 5%, que la charge moyenne de compression verticale sur l'ensemble de la production de bouteilles est égale à 30 Newtons?

Annexe de l'exercice 1 À rendre avec la copie

