

## Annexe 3

(niveau fin de Collège ou Seconde, parfois Première,  
exceptionnellement Terminale)

### Précisions sur un tracé de cardioïde

... où l'on découvre des triangles équilatéraux

**1. Rappel :** ch § 4 de l'Annexe 2, et figure 16 où N et P décrivent une cardioïde.

Nous utiliserons la double caractérisation de la cardioïde, à partir du cercle  $\Gamma(D,R)$ , de diamètre  $[AB]$  et du cercle  $L(O,R/2)$ , de diamètre  $[AD]$ , comme :

- conchoïde du cercle L par rapport à A, avec report de R,
- lieu des projetés orthogonaux de A sur les tangentes à  $\Gamma$ .

### 2. Propriétés de la figure :

(où  $MP = MN = AD$ )

2.1. Niveau Sixième :  $(AB)$  est axe de symétrie de la cardioïde.

2.2. Niveau Quatrième : Rectangles MNYD, MPXD, PNYX.

2.3. Niveau Troisième ou Seconde :

Les arcs  $M'X$  et  $XB$  sont égaux.

Donc aussi, par déductions successives :

- les angles  $\widehat{XAM'}$  et  $\widehat{XAB}$ , inscrits dans  $\Gamma$ , sont égaux,
- $(AX)$  est bissectrice de  $\widehat{BAM}$ ,
- $XP = XK$ ,
- les triangles  $XAP$  et  $XAK$  sont égaux.

2.4. Niveau Seconde :

- les triangles  $ASN$ ,  $AMD$ ,  $AM'B$ , ... sont semblables.

### 3. Problème 1.

Quels sont les points de la cardioïde les plus éloignés de l'axe de symétrie (graphiquement on y perçoit les tangentes comme parallèles à cet axe) ?

Soit P un tel point, et sa distance PH à  $(AB)$  (j'imite Bruno Alaplantive qui a déjà employé cette méthode dans l'étude d'un ovoïde, présentée dans le Bulletin 446, p. 288-294, et récidive ici).

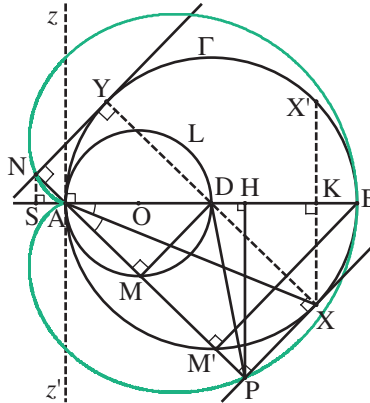


Figure 16

Le maximum de PH correspond à celui de l'aire du triangle PAD.

Or aire PAD = aire PAX (en raison de  $(DX) \parallel (AP)$ ) et aire PAX = aire PXX.

Mais PKX est une « moitié » du triangle isocèle AXX'.

Donc il s'agit de rendre d'aire maximale le triangle isocèle AXX' inscrit dans le cercle fixe  $\Gamma$ .

La réponse est classique (cf. article de Bruno Alaplantive signalé ci-avant, avec trois méthodes élémentaires de démonstration, et Annexe 4 pour d'autres méthodes niveau Première) :

Le maximum a lieu quand AXX' est équilatéral.

Autrement dit, quand  $\widehat{BAM} = 2\widehat{BAX} = 60^\circ$ , alors  $AM = AD/2 (= R/2)$  et  $AP = 3R/2$ ,  $AH = 3R/4$ .

Notons  $\alpha$  et  $\alpha'$  les positions ainsi « maximales » de P.

### Remarque

Voici, de Bruno Alaplantive, en plus de sa solution par les aires, une solution trigonométrique, que je recopie telle quelle, niveau Première, qui utilise aussi un théorème dit « de la bissectrice », facile à démontrer par les aires (niveau Cinquième) selon lequel, dans un triangle, quel qu'il soit, « la bissectrice intérieure d'un angle partage le côté opposé dans le rapport des côtés adjacents ».

On a  $ab = ch$  ou  $h = ab/c$  (aire),  $alc = b'l'b''$  (bissectrice), alors  $h = bb'/b''$ .

Or  $b' = r \sin x$  et  $b'' = r \tan x$ .

Alors

$$\begin{aligned} h &= \frac{r^2(\sin x + \tan x) \sin x}{r \tan x} \\ &= r(\sin x + \tan x) \cos x \\ &= r \sin x(1 + \cos x) \end{aligned}$$

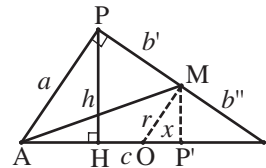


Figure 17

On étudie donc la fonction  $f(x) = \sin x(1 + \cos x)$  pour  $x$  sur  $[0, \pi[$ .

Il vient  $f'(x) = 2 \cos^2 x + \cos x - 1$  et l'étude de  $2A^2 + A - 1 = 0$  rend  $A = -1$  (hors définition) et  $A = 1/2$ , etc.

## 4. Problème 2 :

Soit  $(z'z)$  perpendiculaire à  $(AB)$ . Quels sont les points de la cardioïde, du demi-plan de frontière  $(z'z)$  qui ne contient pas B, les plus éloignés de  $(z'z)$  ? (graphiquement on y perçoit les tangentes comme parallèles à  $(z'z)$ ).

Soit N un tel point.

Il s'agit de chercher le maximum de AS.

Or  $\frac{SA}{AM} = \frac{AN}{AD}$  (similitude de ASN et AMB), soit  $SA = \frac{AM(R - AM)}{AD}$ .

$AM(R - AM)$  est le produit de deux facteurs dont la somme est constante. Il est donc

maximum quand ils sont égaux (ou le plus près possible de l'égalité, si des contraintes empêchent celle-ci). Cela est classique (surtout pour les lecteurs assidus de nos brochures !). En voici une démonstration possible dès la Quatrième :

Des essais, avec, d'abord, des valeurs numériques de  $R$ , de diverses valeurs de  $x$  pour

$x(R-x)$  laissent conjecturer que le maximum a lieu pour  $x = \frac{R}{2}$ .

Posons  $x = \frac{R}{2} - m$ , alors  $R-x = \frac{R}{2} + m$  et  $x(R-x) = \left(\frac{R}{2}\right)^2 - m^2$ . D'où...

Les solutions du problème 2 sont donc fournies par  $AM = R/2$ , donc, successivement,

$$\widehat{DAM} = 60^\circ, \widehat{SAN} = 60^\circ, SA = R/4, AN = R/2.$$

Notons  $\beta$  et  $\beta'$  les positions ainsi « maximales » de  $N$ . Elles correspondent à  $\alpha$  et  $\alpha'$  ! D'où des alignements avec  $A$ .

### 5. Et si on parlait équations ? (Niveau Terminale)

- Reprenons la figure 16, et les points  $P$  de la cardioïde tels que  $AP = AM + MP$ .

Posons  $\widehat{BAP} = \theta$ . Il vient :

$$\begin{aligned} AP &= AD \cos \theta + MP \\ &= a \cos \theta + a \\ &= a(1 + \cos \theta). \end{aligned}$$

On retrouve ceci pour  $N$  avec  $\theta$  défini pareillement par  $\widehat{DAN} = \theta$ .

Nous obtenons ainsi une équation de la cardioïde en *coordonnées polaires*, d'axe  $[AB]$  et de pôle  $A$ ,

$$\rho = a(1 + \cos \theta).$$

- Jean-Pierre Friedelmeyer propose une *équation paramétrique de la cardioïde* liée aux choix indiqués par la figure 17' :

$$\begin{cases} x = \cos \theta (1 + \sin \theta), \\ y = \sin \theta - \cos^2 \theta. \end{cases}$$

Il y ajoute une *équation paramétrique du lieu de  $H$* , orthocentre du triangle  $ABC$  :

$$\begin{cases} x = \tan \theta (1 - \sin \theta) (2 + \sin \theta), \\ y = \sin \theta - \cos^2 \theta. \end{cases}$$

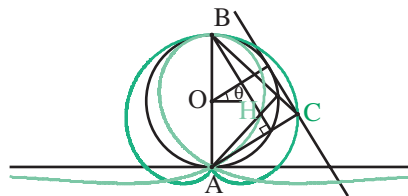


Figure 17'

À condition d'expliquer l'objectif, les calculs semblent possibles dès la Seconde.