Quelques remarques à propos de l'article de Jean-Yves Larrieu sur l'enseignement de la logique (BV 511)

Jacques Chayé(*)

• La conjonction *si* dans le langage courant (sans parler de l'adverbe … ou de la note de musique !) présente davantage de significations distinctes que celles signalées dans l'article. Voici quelques exemples :
– si tu sors, tu risques d'avoir besoin de ton imper (si…alors),
– si tu as faim, tu pourras trouver du jambon dans le frigo (un conseil, au cas où …),
– tu auras des ennuis si tu continues comme ça (si…alors),
– si le feu est vert, vous pouvez passer (si et seulement si),
– si je te le dis, tu dois me croire (puisque),
– comment l'aurais-je fait si je n'étais pas né [La Fontaine] (puisque),
– ne m'en veuillez pas si je vous pose la question (parce que),
– si ce n'est pas facile, c'est tout de même faisable (bien que),
– nous verrons demain : ne vous désolez pas s'il fait mauvais temps (si … alors),
– aujourd'hui, il pleut : ne vous désolez pas s'il fait mauvais temps (parce que).

• « la situation d'équivalence est exceptionnelle ». Pas si sûr : elle est au contraire très présente dans les résolutions d'équations entre autres, ou en géométrie, en analyse, etc., sauf si l'on se refuse à utiliser tous les théorèmes bien utiles qui traduisent une condition nécessaire et suffisante (par exemple les propriétés de compatibilité des opérations avec l'égalité).

On s'évite les pénibles et barbantes démarches par analyse et synthèse quand on peut remplacer une condition par une condition équivalente.

• Le §4 donne l'impression que la confusion entre *si … alors* et *donc* est sans gravité. Pourtant, il me semble très important de distinguer une **implication** (qui porte sur une ou plusieurs variables) d'une **déduction** (qui porte sur une ou plusieurs constantes).
Quel que soit le réel x, si $x > 3$ alors $x^2 > 9$,
or, $\pi > 3$
donc $\pi^2 > 9$
(ou encore : $\pi^2 > 9$ car $\pi > 3$).

Bien sûr, avec la définition formelle de l'implication, la proposition $\pi > 3 \Rightarrow \pi^2 > 9$

(*) b2.4ac@aliceadsl.fr

est vraie, mais ce n'est pas très utile, d'autant plus que les propositions

$$\pi < 3 \Rightarrow \pi^2 < 9 \text{ et } \pi < 3 \Rightarrow \pi^2 > 9$$

sont vraies elles aussi.

Ce qui est intéressant et utile, c'est l'implication (quantifiée, c'est plus correct !) :

$$\forall x, (x \in \mathbb{R})\ x > 3 \Rightarrow x^2 > 9$$

qui permet la déduction : donc $\pi^2 > 9$ (précédée de : or $\pi > 3$).

En résumé, on ne peut remplacer ni *si … alors* par *donc*, ni *donc* par *si … alors*.

• « dans des cas particuliers, le *ou* mathématique peut se comporter comme un *ou* exclusif ».
Je ne sais pas bien ce que signifie ce « peut se comporter » ; ce qu'il faut faire comprendre aux élèves, c'est qu'en math, le *ou* est toujours inclusif (ce sont les lois de de Morgan qui justifient cette convention) même si dans certaines situations le *ou* exclusif conviendrait. Par exemple, quand deux ensembles A et B sont disjoints, la formulation :

$$x \in A \cup B \text{ si et seulement si } x \in A \text{ ou } x \in B,$$

convient, que le *ou* soit exclusif ou non ; ce n'est pas le *ou* qui est exclusif, c'est la situation de A et de B qui présente un caractère exclusif.

Quand on rencontre un cas où le *ou* exclusif serait bien commode (par exemple pour définir la différence symétrique de deux ensembles), on s'en tire très bien avec *soit … soit*.

En résumé, en math, le *ou* est toujours inclusif.

• Dommage que « les démonstrations fausses » soient remises à plus tard ! Je pense, en particulier à ces raisonnements à l'envers si fréquents qui consistent, face à une propriété à démontrer, de partir de celle-ci et d'en déduire in fine quelque chose comme 0 = 0 et de conclure : donc, la propriété est exacte !

Par exemple, si on demande de démontrer que $\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{2}$ et que l'élévation au carré des deux membres amène à 2 = 2, il est indispensable de dénoncer le procédé en faisant remarquer que, avec la fausse égalité $\sqrt{2-\sqrt{3}} - \sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{2}$ on arriverait au même résultat.

J'ai été très étonné, au cours d'un atelier aux journées de Toulouse – où l'on nous proposait de corriger certaines copies – de voir l'excessive indulgence de plusieurs collègues vis-à-vis de ce type de faux raisonnement.
Faut-il donc renoncer à corriger les démarches erronées ?