

bulletin

38^e année

N° 199 - juin 1959

Association des
Professeurs de Mathématiques

de l'Enseignement Public

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public.

29, rue d'Ulm - Paris (5°)

Présidents d'Honneur :

Mlle DIONOT, M. DELCOURT, M. HENNEQUIN.

Bureau.

Président :

M. HUISMAN, 3, rue Charles-V, Paris, 4° (*Affaires générales ; direction du « Bulletin »*).

Vice-Présidents :

Mlle MASSON, 12, bd Desgranges, Sceaux (Seine) (*Enseignement du Second Degré*).

M. CLUZEL, 96, av. de Villiers, Paris, 17° (*Enseignement Technique*).

M. MAGNIER, 22, rue Henri-Barbusse, Paris, 5° (*Classes préparatoires aux Grandes Ecoles*).

M. MONJALLON, 23, bd St-Germain, Paris, 5° (*Enseignement du Premier Degré*).

M. REVUZ, 16, rue de Rome, Les Essarts-le-Roi (S.-et-O.) (*Conférences ; Enseignement Supérieur*).

Secrétaire général :

M. WALUSINSKI, 26, Parc de la Bérengère, St-Cloud (S.-et-O.) (*Administration de l'A.P.M. ; préparation des réunions ; secrétariat de la rédaction du « Bulletin » ; publicité*).

Secrétaires :

Mlle MARCHAND, 20, rue des Archives, Paris, 4° (*Compte rendu des réunions*).

M. CROZES, 10, rue du Buisson-St-Louis, Paris, 10° (*Correspondance de la rédaction*).

M. MOUGENOT, 77, rue de la République, Laxou-Nancy (M.-et-M.) (*Organisation des Régionales*).

M. SIROS, 13, avenue Jean-Racine, Sceaux (*Programmes*).

Trésorier :

M. NICOLAS, 57, rue Bucourt, St-Cloud (S.-et-O.).

Trésorier-adjoint :

M. LEGRAND, 3 bis, avenue R.-Poincaré, Margny-lès-Compiègne (Oise).

N.-B. — Prière aux membres de l'A.P.M. d'adresser directement la correspondance au membre du Bureau compétent.

Comité de Rédaction.

Président : M. HUISMAN ; *Secrétaire :* M. WALUSINSKI ; *Membres :* Mlle FÉLIX ; MM. CHAZAL, CHEVALLIER, CROZES, GENTILHOMME, ITARD.

Rapporteurs spécialisés.

Concours ; Grandes Ecoles : M. CHAZAL ; *Définitions et notations :* Mlle FÉLIX ; *Histoire des Mathématiques :* M. ITARD ; *Astronomie (relation avec la Société Astronomique de France) :* M. WALUSINSKI.

Comité.

Sortants en 1960 : MM. CLUZEL (*E.N.N.A., Paris*) ; DEMENGEL (*E.N. Radiotechnique*) ; GUILLORÉ (*C.C., Paris*) ; HUISMAN (*Montaigne*) ; MONJALLON (*St-Louis*) ; SIROS (*Louis-le-Grand*).

Sortants en 1961 : M. BAY (*Condorcet*) ; Mlle BIARD (*E.N.S. Fontenay-aux-Roses*) ; MM. CASSÉ (*Corbeil-Essonnes*) ; CROZES (*Henri-IV*) ; LE MÉNAGER (*Angers*) ; Mlle MARCHAND (*Sèvres*) ; M. MOUGENOT (*Poincaré, Nancy*) ; Mlle VERVAECKE (*Fénelon, Lille*).

Sortants en 1962 : MM. FAVRELLE (*Faidherbe, Lille*) ; KLEIN (*Charlemagne*) ; MAGNIER (*Louis-le-Grand*) ; Mlle MASSON (*Marie-Curie*) ; MM. NICOLAS (*E.N., Auteuil*) ; REVUZ (*Fac. Sc., Poitiers*) ; SCHAEFFER (*Pascal, Clermont-Ferrand*) ; Mlle CLAVIER (*Sèvres*).

Sortants en 1963 : MM. BIGUENET (*E.N.S. Céramique, Sèvres*) ; CHAZAL (*Charlemagne*), Mme DUBOIS-VIOLETTE (*Fénelon*) ; MM. GIRARD (*Janson-de-Sailly*) ; LEGRAND (*Compiègne*) ; Mlle MINOIS (*Le Havre*) ; MM. POITOU (*Fac. Sc., Lille*) ; WALUSINSKI (*St-Cloud*).

I. ETUDES.

A. REVUZ : Théorie de l'intégration (III)	254
E. MOURIER : Quelques grandes théories mathématiques intervenant dans le calcul des probabilités	264

II. ESSAI.

J. QUERRÉ : Décomposition d'un nombre premier $p \equiv 1 \pmod{4}$ en une somme de deux carrés	269
---	-----

III. PROBLÈMES PÉDAGOGIQUES.

Z. KRYGOWSKA : Exemple d'un procédé de généralisation en algèbre scolaire	270
Y. CROZES : Axiomatique et redécouverte	274
C. VIATTE : A propos de problèmes : que voulons-nous ?	282
G. WALUSINSKI : Utilisation d'un film de géométrie animée en classe de Seconde	286
Pour un nouveau numéro spécial des Cahiers Pédagogiques	287
J. ITARD : « Le coin du vieux maniaque »	291

IV. BIBLIOGRAPHIE ET DOCUMENTATION.

C. BERGÉ : Théorie des graphes (A. Huisman), 293 ; *L'enseignement des sciences* (G. W.), 295 ; Parmi les revues allemandes et hollandaises (J.-M. Chevallier), 297 ; *L'enseignement mathématique en Norvège* (J.-M. Ch.), 298 ; *L'enseignement de l'astronomie* (G. W.), 300 ; *Cybernétique, qu'es-tu ?* (G. W.), 301 ; Mme TONNELAT : Principes de la théorie électro-magnétique et de la Relativité (G. W.), 302 ; J. RIVAUD : Exercices d'analyse (G. W.), 302 ; FLAVIEN : Nouvelles tables numériques (G. W.), 303 ; J. FOURASTIÉ : Pourquoi nous travaillons (G. W.), 303 ; Recherches algébriques sur le théorème de Picard-Montel (J. Anastassiadis), 304 ; Manuel pratique du test de Rorschach (Mme Loosli-Usteri), 305 ; Ouvrages reçus, 305.

V. DOCUMENTS OFFICIELS.

R. DONTOT : Rapport sur l'agrégation masculine de mathématiques, session 1958	306
---	-----

VI. LA VIE DE L'ASSOCIATION.

- Compte rendu de l'Assemblée Générale du 22 mars 1959	330
Réunions du Comité du 16 avril ; du Bureau du 21 avril	334
Enquête sur le baccalauréat, 336 ; Définition de mots et notations, 341.	
Le Bureau s'adresse aux Adhérents, 343 ; Le Bloc-Notes de l'A.P.M., 347.	

Le *Bulletin* paraît cinq fois par année scolaire : octobre, janvier, mars, juin, septembre (textes des concours universitaires). L'abonnement comporte également les fascicules d'énoncés du Baccalauréat et du B.E.P.C., fascicules dont le numérotage suit celui des *Bulletins*.

COTISATION — Elle comprend l'abonnement au *Bulletin*, ainsi que les fascicules d'énoncés.

Cotisation normale 1 000 F

Cotisation réduite (stagiaires C.P.R., élèves des E.N.S. et des I.P.E.S., jeunes gens accomplissant leur service militaire, retraités) 500 F

ABONNEMENT (personnes n'appartenant pas à l'Enseignement Public, bibliothèques, etc...) :

France et Communauté : 1 200 F ; autres Pays : 1500 F

Le numéro : 300 F

MODE DE PAIEMENT : Virement postal (adressé au centre de chèques du tireur) ou mandat-carte à l'adresse :

A.P.M. — 29, rue d'Ulm, Paris, 5^e — C.C.P. Paris 5708-21

RECOMMANDATIONS DU TRESORIER — Indications à porter sur le talon du chèque : 1^o Nom (en majuscules) et prénom. — 2^o Adresse où doit être envoyé le *Bulletin*. — 3^o Ancienne adresse en cas de changement. — 4^o Nom de l'établissement où l'on exerce. — 5^o Nom de l'établissement précédent en cas de mutation en fin d'année scolaire.

THÉORIE DE L'INTÉGRATION (III)

par A. REVUZ

Professeur à la Faculté des Sciences de Poitiers *

TROISIÈME PARTIE

L'intégrale comme forme linéaire

Nous avons reconnu dans la 1^{re} et la 2^e partie que l'intégrale apparaissait toujours comme une forme linéaire continue sur un espace vectoriel topologique.

La question que nous allons étudier est maintenant la suivante : dans quelle mesure cette propriété est-elle caractéristique de l'intégrale, et dans quelle mesure la théorie de l'intégration peut-elle être présentée comme une théorie de prolongement de formes linéaires ?

I. LE THÉORÈME DE RIESZ.

C'est, historiquement, la première réponse aux questions posées ci-dessus, et elle semble bien être restée théoriquement la plus importante.

Sur l'anneau $\mathcal{M}$ des réunions finies de semi-segments $]\alpha, \beta]$ et de segments $[0, x]$, la donnée d'une étendue m de signe quelconque, différence de deux étendues positives, est équivalente à celle d'une fonction à variation bornée g liée à m par $g(x) = m([0, x])$. Les fonctions de

$\mathcal{C}[0, 1]$ sont intégrables par rapport à m et $I(f) = \int_0^1 f dg = \int_0^1 f dm$ est une forme linéaire et continue sur $\mathcal{C}$.

Le théorème de Riesz énonce la réciproque. Plus précisément :

THÉORÈME : Il y a correspondance biunivoque entre les formes linéaires continues I sur $\mathcal{C}[0, 1]$ et les fonctions à variation bornée g sur $[0, 1]$ continues à droite (1).

On a :
$$I(f) = \int_0^1 f dg.$$

* Conférence prononcée le 27 mars 1958 à l'Institut H.-Poincaré, et organisée par la Société Mathématique de France, en accord avec l'A.P.M., à l'intention spéciale des professeurs.

(1) On vérifie aisément qu'en un point de discontinuité de g , n'intervient dans le calcul de $\int f dg$, où f est continue, que $g(x + 0) - g(x - 0)$. Il y a une infinité de fonctions g qui donnent la même valeur $\int f dg$. Imposer la continuité à droite a donc pour but d'assurer la biunivocité de la correspondance entre g et I : elle est choisie, d'autre part, de telle sorte que l'étendue déduite de g soit σ -additive. (Cf. 2^e partie).

1° Nous démontrons d'abord que si I est continue, elle est la différence de deux formes linéaires positives ($I(f) \geq 0$ si $f \geq 0$).

a) Soit $\mathcal{C}^+$ l'ensemble des fonctions positives de $\mathcal{C}$.

Pour $f \in \mathcal{C}^+$, posons $J(f) = \sup \{ I(h) ; 0 \leq h \leq f \}$.

Comme $|I(f)| \leq \|I\| \|f\|$, on a $J(f) < +\infty$ et évidemment $0 \leq J(f)$.
 $J(\lambda f) = \lambda J(f)$ pour $\lambda > 0$ est évident.

Montrons que si $f, g \in \mathcal{C}^+$, on a $J(f + g) = J(f) + J(g)$.

α) Soit $h \in \mathcal{C}^+$ telle que $0 \leq h \leq f$ et $I(h) > J(f) - \varepsilon$,

$k \in \mathcal{C}^+$ telle que $0 \leq k \leq g$ et $I(k) > J(g) - \varepsilon$.

On a : $0 < h + k < f + g$, d'où $J(f + g) > J(f) + J(g) - 2\varepsilon$, et ε étant arbitraire : $J(f + g) \geq J(f) + J(g)$.

β) Soit $l \in \mathcal{C}^+$ et $0 \leq l \leq f + g$.

Posons $h = \inf(l, f)$ et $k = l - h$.

On a d'une part $0 < h < f$, d'autre part, si $l(x) \leq f(x)$, on a $h(x) = l(x)$, d'où $k(x) = 0$, et si $l(x) > f(x)$, $k(x) = l(x) - h(x)$, c'est-à-dire $k(x) \leq f(x) + g(x) - f(x) = g(x)$, donc $0 \leq k \leq g$.

Or, $J(f + g) = \sup \{ I(l) ; 0 < l < f + g \}$ et $I(l) = I(h) + I(k)$, h et k sont des fonctions vérifiant $0 \leq h \leq f$ et $0 \leq k \leq g$; *a fortiori*, si on considère toutes les fonctions vérifiant ces conditions, aura-t-on :

$$\sup I(l) \leq \sup I(h) + \sup I(k),$$

c'est-à-dire : $J(f + g) \leq J(f) + J(g)$.

J est donc additive et positivement homogène sur $\mathcal{C}^+$.

b) Définissons alors J sur $\mathcal{C}$, en posant :

$$J(f) = J(f^+) - J(-f^-),$$

où $f^+ = \sup(f, 0) \in \mathcal{C}^+$ et $f^- = \inf(f, 0)$, d'où $-f^- \in \mathcal{C}^+$.

De $(\lambda f)^+ = \lambda f^+$, $(\lambda f)^- = \lambda f^-$ si $\lambda > 0$,

$(\lambda f)^+ = \lambda f^-$, $(\lambda f)^- = \lambda f^+$ si $\lambda < 0$,

et de $J(\lambda f) = \lambda J(f)$ pour $f \in \mathcal{C}^+$ et $\lambda > 0$, on déduit :

$$J(\lambda f) = \lambda J(f) \text{ pour } f \in \mathcal{C} \text{ et } \lambda \text{ quelconque.}$$

D'autre part :

$f^+ + g^+ \geq f + g$ et $f^+ + g^+ \geq 0$, donc $f^+ + g^+ \geq (f + g)^+$,

c'est-à-dire $h = f^+ + g^+ - (f + g)^+ \in \mathcal{C}^+$

En outre :

$$f + g = (f + g)^+ + (f + g)^- = f^+ + g^+ + f^- + g^-,$$

d'où $-f^- - g^- + (f + g)^- = h$.

L'additivité de J sur $\mathcal{C}^+$ entraîne :

$$J[(f + g)^+] = J(f^+) + J(g^+) - J(h),$$

$$J[-(f + g)^-] = J(-f^-) + J(-g^-) - J(h),$$

ce qui implique l'additivité de J sur $\mathcal{C}$.

J étant une forme linéaire, $K = J - I$ en est une autre ; or, si $f \in \mathcal{C}^+$, $J(f) \geq I(f)$, donc $K(f) \geq 0$, K est aussi une forme linéaire positive, et la décomposition annoncée de I est obtenue.

2° Nous montrons alors que si I est linéaire et positive, il existe g croissante continue à droite telle que $I(f) = \int_0^1 f dg$.

Posons $g(x) = \inf \{ I(f), f \in \mathcal{C}, f > \chi_x \}$, où χ_x est la fonction caractéristique du segment $[0, x]$.

La croissance de g est évidente.

La continuité à droite résulte de ce que :

$$I(f) \leq I(f + \varepsilon) \leq I(f) + \|I\| \varepsilon$$

et qu'il existe par suite, $\forall \varepsilon > 0$, f telle que :

$$g(x) < I(f) < g(x) + \varepsilon \quad \text{avec } f(t) > 1 \text{ pour } t \in [0, x].$$

Il en résulte que sur un intervalle $(x, x + \eta)$, on a encore $f(t) > 1$, et par suite $g(x) < g(t) < g(x) + \varepsilon$.

Ceci étant, $\varepsilon > 0$ étant donné, il existe pour une fonction $f \in \mathcal{C}$ un découpage Δ de $[0, 1]$, tel que :

$$\left| \int_0^1 f dg - \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) [g(x_{i+1}) - g(x_i)] \right| < \varepsilon.$$

Ceci est vrai pour tout découpage plus fin que Δ .

On peut en particulier supposer que Δ est assez fin pour que l'oscillation de f sur les segments $[x_i, x_{i+2}]$ soit inférieure à ε . Pour chaque valeur de i , on peut d'autre part choisir une fonction f_i égale à 1 sur $[0, x_i]$ et décroissant linéairement de 1 à 0 sur $[x_i, t_i]$ où $x_i < t_i < x_{i+1}$ et telle que, $\forall \xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$:

$$\left| \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) [g(x_{i+1}) - g(x_i)] - \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) [I(f_{i+1}) - I(f_i)] \right| < \varepsilon.$$

Considérons alors la fonction :

$$\varphi = f - \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) [f_{i+1} - f_i].$$

Pour $x \in [x_i, t_i]$, elle vaut :

$$\varphi(x) = f(x) - f(\xi_{i-1}) [f_i(x) - f_{i-1}(x)] - f(\xi_i) [f_{i+1}(x) - f_i(x)]$$

Or, l'oscillation de f sur $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ est inférieure à ε , on en déduit que $\varphi(x)$ diffère de moins de ε de :

$$f(\xi_i) [1 - [f_i(x) - f_{i-1}(x)] - [f_{i+1}(x) - f_i(x)]] = f(\xi_i) [1 - f_{i+1}(x)] = 0.$$

Pour $x \in [t_i, x_{i+1}]$, on a :

$$\varphi(x) = f(x) - f(\xi_i).$$

Donc $\forall x \in [0, 1] \quad |\varphi(x)| < \varepsilon$,
et par suite : $|I(\varphi)| \leq \|I\| \varepsilon$.

En rapprochant toutes les inégalités, on a :

$$\left| \int_0^1 f dg - I(f) \right| < (\|I\|) + 2\varepsilon,$$

ce qui prouve l'égalité annoncée, ε étant arbitraire.

Le résultat précédent est vrai dans des circonstances beaucoup plus générales que nous indiquons ci-dessous :

X localement compact ; $\mathcal{M}$ σ -anneau sur X contenant tous les compacts ; μ : mesure positive sur $\mathcal{M}$ telle que :

1° $A \in \mathcal{M}, \mu A = 0 ; B \subset A \Rightarrow B \in \mathcal{M}, \mu B = 0$ (mesure complète),

2° $\forall K \subset X, K$ compact

$$\mu K = \inf \{ \mu K_1 ; K \subset \hat{K}_1 \}$$

K_1 : compact, $\hat{K}_1$ intérieur de K_1 .

La différence de deux telles mesures est dite une mesure de Radon.

$\mathcal{C}(X)$: espace des fonctions continues sur X à supports compacts.

I : forme linéaire sur $\mathcal{C}(X)$, continue en ce sens que, pour tout compact K , sa restriction à $\mathcal{C}(X, K)$ (fonctions dont le support est inclus en K) est continue pour la norme :

$$\|f\| = \sup \{ |f(x)|, x \in K \}.$$

Dans ces conditions, on a le

THÉORÈME : Il y a correspondance biunivoque entre les mesures de Radon sur X , et les formes linéaires continues sur $\mathcal{C}(X)$; on a :

$$\int_X f d\mu = I(f),$$

et si I est positive, $\mu(K) = \inf \{ I(f) ; \mathcal{C}_K \subset f \}$.

II. ESSAI DE PRÉSENTATION « PUREMENT FONCTIONNELLE » DE L'INTÉGRALE DE RIEMANN.

Nous avons trouvé que $\mathcal{M}$ étant un anneau sur X , et m une étendue sur $\mathcal{M}$, $\mathcal{F}(X, \mathcal{M}, m)$ était un espace vectoriel réticulé. Cette propriété était déjà possédée par l'ensemble $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ des combinaisons linéaires finies des fonctions caractéristiques des ensembles de $\mathcal{M}$, I étant définie pour ces fonctions par :

$$I(\sum \lambda_i \chi_{A_i}) = \sum \lambda_i m A_i.$$

On peut alors songer à refaire la théorie de l'intégrale de Riemann de la manière suivante :

Sont donnés au départ :

1° un espace vectoriel réticulé V d'applications de X dans R qui ou bien contient des constantes (c'est le cas de $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ si $X \in \mathcal{M}$), ou bien avec f contient $\inf(1, f)$;

2° une application linéaire positive I de V dans R .

A partir de là, on peut considérer l'espace $\widehat{V}$ des fonctions f telles que $\forall \varepsilon > 0, \exists g, h \in V$, avec :

$$g \leq f \leq h \quad \text{et} \quad I(h - g) < \varepsilon.$$

On vérifie immédiatement que $\widehat{V}$ a les mêmes propriétés algébriques que V et que I se prolonge en une forme linéaire sur $\widehat{V}$.

A-t-on l'équivalent exact de l'intégration de Riemann ? Autrement dit, peut-on trouver un anneau $\mathcal{M}$ et une étendue positive m sur $\mathcal{M}$, telle que $\widehat{V} = \mathcal{J}(X, \mathcal{M}, m)$ et $I(f) = \int f dm$?

Si $\mathcal{M}$ existe, c'est l'anneau des ensembles dont les fonctions caractéristiques appartiennent à $\widehat{V}$: il est immédiat que ces ensembles constituent bien un anneau et que $I(\chi_A)$ est une étendue positive sur cet anneau. Mais, on a en général l'inclusion stricte $\mathcal{J}(X, \mathcal{M}, m) \subset \widehat{V}$, la restriction de I à $\mathcal{J}(X, \mathcal{M}, m)$ étant bien alors $\int f dm$. Quant à V et $\mathcal{J}$, ils peuvent ne pas être comparables.

Exemple : V est l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$ nulles en 0 et dérivables en 0. On prend $I(f) = f'(0)$. On vérifie aisément que $\mathcal{M}$ est l'anneau des complémentaires des voisinages de 0, que m est nulle, que $\mathcal{J}(X, \mathcal{M}, m)$ est constitué des fonctions bornées nulles sur un voisinage de 0. $\widehat{V}$ est constitué des fonctions bornées nulles en 0, et dérivable en 0.

On voit donc que les hypothèses faites donnent une théorie « analogue » à celle de l'intégration de Riemann, mais ne s'y ramenant pas complètement.

Il est cependant intéressant d'étudier les relations entre les espaces $\mathcal{J}$ et $\widehat{V}$.

Proposition 1. — Si $f > 0$, $f \in \widehat{V}$, on a $f^{-1}([\lambda, \infty]) \in \mathcal{M}$, sauf pour un ensemble au plus dénombrable de valeurs exceptionnelles de λ .

En effet, soit $\Phi\lambda = f^{-1}([\lambda, \infty])$.

Posons $f_\lambda = f - \inf(f, \lambda)$, on a $Q_\lambda = f^{-1}_\lambda([0, \infty])$,
et pour $\varepsilon > 0$, $k > 0$,

$$\inf \left\{ \frac{f_\lambda}{\varepsilon}, 1 \right\} \leq \chi_{Q_\lambda} \leq \inf \left\{ \frac{f_{\lambda-k}}{k}, 1 \right\}$$

Posons :

$$\mathcal{J}(\lambda) = \sup_{\varepsilon} I \left[\inf \left\{ \frac{f_\lambda}{\varepsilon}, 1 \right\} \right]$$

$$K(\lambda) = \inf_k I \left[\inf \left\{ \frac{f_{\lambda-k}}{k}, 1 \right\} \right]$$

On a $\mathcal{J}(\lambda) \leq K(\lambda)$, et l'égalité implique $Q_\lambda \in \mathcal{M}$.

Or, $\lambda < \mu \implies K(\mu) \leq \mathcal{J}(\lambda)$,
car, si $k < \mu - \lambda$,

$$f_{\mu-k} < f_\lambda \text{ et } \inf \left\{ \frac{f_{\mu-k}}{k}, 1 \right\} < \inf \left\{ \frac{f_\lambda}{k}, 1 \right\}$$

Les intervalles $] \mathcal{I}_\lambda, K_\lambda [$ sont donc deux à deux disjoints et par suite l'ensemble de ceux qui ne sont pas vides est au plus dénombrable.

Remarque : La proposition précédente donne immédiatement la réciproque du théorème sur l'identité entre les fonctions mesurables bornées et $\mathcal{I}(X, \mathcal{M}, \mu)$. ($\mathcal{M}$: σ -anneau, μ : mesure).

Dans cette situation, en effet, $V = \mathcal{G}(\mathcal{M})$ où $\mathcal{M}$ est un σ -anneau.

Or, $Q_\lambda = \bigcap_n Q_{\lambda - \varepsilon_n}$, où ε_n est une suite décroissante, tendant vers 0. Mais on peut choisir ε_n de manière que $Q_{\lambda - \varepsilon_n} \in \mathcal{M}$, il en sera alors de même de Q_λ .

Appelons ici mesurables les fonctions telles que :

$f^{-1}(] \alpha, \beta] - \{ 0 \}) \in \mathcal{M}$, sauf pour un ensemble dénombrable D de valeurs de α et β . On a alors la

Proposition 2. — $\mathcal{I}$ est constitué des fonctions f mesurables bornées ; nulles hors d'un ensemble $A_f \in \mathcal{M}$.

Condition nécessaire. — C'est évident pour $f > 0$, en vertu de la proposition 1. Mais $\sup(f, 0)$ et $-\inf(f, 0)$ sont intégrables en même temps que f et sont positives.

Condition suffisante. — Il suffit d'utiliser les sommes de Lebesgue, en choisissant les l_i hors de l'ensemble D.

III. PRÉSENTATION PUREMENT FONCTIONNELLE DE L'INTÉGRALE DE LEBESGUE.

Adjoignons aux hypothèses faites dans le paragraphe précédent sur l'espace V, et sur la forme linéaire I, la condition suivante :

$$|f| \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |f_n| \Rightarrow I(f) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} I(|f_n|).$$

Le sens de cette hypothèse est d'introduire une certaine continuité pour I. On voit qu'elle est satisfaite si V est l'espace vectoriel sur R engendré par les fonctions caractéristiques d'un anneau et si I est défini sur V à partir d'une étendue positive σ -additive [et *a fortiori* si on part d'un σ -anneau et d'une mesure positive]. Elle l'est également si V est l'espace $\mathcal{C}(X)$ des fonctions continues à support compact défini sur X localement compact et si I est une forme linéaire positive sur $\mathcal{C}(X)$.

Cette fois, il est possible de reconstituer assez rapidement la théorie de la mesure et de l'intégrale de Lebesgue et de mettre en lumière celles de ses propriétés qui à l'expérience se sont révélées les plus importantes.

Le premier point est la définition pour toute fonction $f \in \mathcal{G}(X, \mathbb{R})$ [application de X dans $\bar{\mathbb{R}}$, valeurs $+\infty$ et $-\infty$ admises] de la quantité :

$$N(f) = \inf \left\{ \sum_1^\infty I(|f_n|) ; |f| \leq \sum_1^\infty |f_n| ; f_n \in V \right\}$$

on a $0 \leq N(f) \leq +\infty$

$$\text{et } N\left(\sum_{i \in N} f_i\right) \leq \sum_{i \in N} N(f_i).$$

On remarquera l'analogie (qui est profonde) avec la mesure extérieure.

Soit G l'ensemble des f pour lesquelles $N(f) < +\infty$. Il est clair que G est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{G}$, qu'il contient V et que N est une semi-norme pour G .

Le résultat fondamental est le suivant :

THÉORÈME : G est complet.

On dira qu'une partie de X est de mesure nulle si, pour sa fonction caractéristique χ , $N(\chi) = 0$.

Soit $\{f_n\}$ une suite de Cauchy dans G . De $N(f_n) < \infty$, il résulte que l'ensemble des points où f_n n'est pas fini est de mesure nulle et qu'on ne modifie pas $N(f_n)$ en supposant f_n partout finie.

On peut, en prenant une sous-suite de $\{f_n\}$, supposer qu'on a :

$$N(f_{n+1} - f_n) \leq \frac{1}{2^n}.$$

Considérons alors :

$$g = |f_1| + \sum_{n=1}^{\infty} |f_{n+1} - f_n|.$$

$$\text{On a } N(g) \leq N(f_1) + \sum_{n=1}^{\infty} N(f_{n+1} - f_n) = N(f_1) + 1.$$

Il en résulte que $g \in G$, que par suite g est finie presque partout (1) et que la série $|f_{n+1} - f_n|$ converge presque partout, donc que la suite f_n converge presque partout.

Soit $f = \overline{\lim} f_n$, on a donc en fait $f(x) = \lim f_n(x)$ presque partout et en tous cas $|f| \leq g$.

D'où $N(f) \leq N(g)$, c'est-à-dire $f \in G$.

D'autre part :

$$|f - f_k| \leq \sum_{n=k}^{\infty} |f_{n+1} - f_n|$$

$$N(f - f_k) = \sum_{n=k}^{\infty} (f_{n+1} - f_n) < \frac{1}{2^{k-1}}$$

Donc, la suite f_n (et par conséquent la suite de Cauchy initialement donnée) converge vers f .

(1) C'est-à-dire sauf aux points d'un ensemble de mesure nulle.

On peut définir l'application $\mathcal{I}$ de G dans R par la formule :

$$\mathcal{I}(f) = N(f+) - N(f-);$$

sa restriction à V est I .

$\mathcal{I}$ n'est pas linéaire sur G en général, mais elle est continue. En effet :

$$\mathcal{I}(f) - \mathcal{I}(g) = N(f+) - N(f-) - N(g+) + N(g-),$$

$$\mathcal{I}(f) - \mathcal{I}(g) \leq |N(f+) - N(g+)| + |N(f-) - N(g-)| \leq 2N(f - g)$$

(conséquence de l'inégalité triangulaire).

Mais puisque I est linéaire sur V , la restriction de $\mathcal{I}$ à l'adhérence $\bar{V}$ de V dans G sera une forme linéaire et continue sur $\bar{V}$.

N n'étant en général qu'une semi-norme sur $\bar{V}$, on passe au quotient (relation d'équivalence $N(f - g) = 0$), pour obtenir un espace vectoriel normé complet L^1 (qui contient un sous-espace isomorphe à V , lorsque « $N(f) = 0$ pour $f \in V$ », entraîne $f = 0$, ce qui est souvent le cas pratiquement).

Comme $N(f - g) = 0$ implique $\mathcal{I}(f) = \mathcal{I}(g)$, $\mathcal{I}$ prend la même valeur pour toutes les fonctions d'une même classe et fournit sur $\bar{V}$ une forme linéaire continue.

Nous n'allons pas étudier ici toutes les propriétés de $\bar{V}$ et $\mathcal{I}$, mais uniquement établir que $\mathcal{I}$ est sur $\bar{V}$ une intégrale de Lebesgue (au sens de la 2^e partie de cet exposé).

Désignons par V^+ l'ensemble des fonctions positives de V .

THÉOREME 1 : La somme f d'une série de fonctions $f_n \in V^+$ appartient elle-même à V^+ , si et seulement si la série $\mathcal{I}(f_n)$ converge. On a alors :

$$\mathcal{I}(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{I}(f_n).$$

1) *Condition nécessaire :* Soit $f \in V$ et $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$, $f_n \in V$.

De $f_n > 0$, on déduit $\mathcal{I}(f_n) = N(f_n)$.

Mais
$$N\left(\sum_{n=1}^1 f_n\right) \leq N(f) < +\infty.$$

La série de terme général $\mathcal{I}(f_n)$ est donc convergente. D'autre part,

$$\sum_{n=1}^{\infty} N(f_n) \leq N(f), \text{ ce qui entraîne l'égalité, en vertu de la sous-additivité}$$

dénombrable de N . On a bien $\mathcal{I}(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{I}(f_n)$

2) Condition suffisante : De $f = \sum_1^\infty f_n$ et de $\mathcal{I}(f_n) = N(f_n)$, on déduit :

$$N(f) \leq \sum_1^\infty N(f_n) = \sum_1^\infty \mathcal{I}(f_n) < +\infty. \text{ D'où } f \in G.$$

Mais $N(f - \sum_1^m f_n) \leq \sum_{m+1}^\infty N(f_n) = \sum_{m+1}^\infty \mathcal{I}(f_n)$, donc $\sum_1^m f_n$ converge vers f , par suite $f \in V$ et $\mathcal{I}(f) = \lim_m \sum_1^m \mathcal{I}(f_n)$.

THÉORÈME 2 : Si f et g sont des fonctions de V^+ , il en est de même de $\inf fg$.

Soient, en effet, des fonctions f_n et g_n de V^+ qui convergent (suivant N) vers f et g . On sait que $\inf f_n g_n \in V^+$.

Or, $|\inf fg - \inf f_n g_n| \leq \sup \{ |f - f_n|, |g - g_n| \}$.

Par suite, $N(\inf fg - \inf f_n g_n) \leq \sup (N(f_n - f), N(g - g_n))$, ce qui prouve que $\inf fg \in V$.

Remarque : On démontrerait de même que si $\lambda \in R^+$ et $f \in V^+$, $\inf(f, \lambda) \in V^+$.

Soit $\mathcal{C}$ la famille des ensembles dont les fonctions caractéristiques appartiennent à V . On a le

THÉORÈME 3 : La famille $\mathcal{C}$ est un σ -anneau.

C'est une conséquence immédiate des deux théorèmes précédents.

THÉORÈME 4 : Si $f \in V$, $E_\lambda = f^{-1}([\lambda, \infty[) \in \mathcal{C} - (\lambda > 0)$.

En effet, $\varphi_\lambda = \inf(f, \lambda) \in V^+$, et si χ_λ est la fonction caractéristique de E_λ , on a :

$$\psi_\varepsilon = \inf \left[\frac{\varepsilon}{1} \varphi_\lambda, 1 \right] \leq \chi_\lambda$$

et ψ_ε tend en croissant vers χ_λ quand ε tend vers 0.

Or, $\lambda \chi_\lambda \leq f$, par suite $N(\chi_\lambda) < +\infty$. Le théorème 1 permet de conclure.

Corollaire : Si $0 \notin [\lambda, \mu]$, et si $f \in V$, on a :

$$f^{-1}([\lambda, \mu]) \in \mathcal{C}, \quad \text{pour } \lambda, \mu \in R.$$

THÉORÈME 5 : Si l'on pose $I(\chi_E) = \mu E$ pour $E \in \mathcal{C}$, $\mathcal{I}(f)$ est obtenu comme sommes de Lebesgue relativement à μ .

Soit, en effet, $l_i [-\infty < i < +\infty]$, une suite croissante, vérifiant $l_0 = 0$, et $l_{i+1} - l_i = \varepsilon$.

$$\text{Soit } E_i = f^{-1}([l_i, l_{i+1}]) \quad \text{pour } i \neq 0$$

$$\mu E_i = \mu_i$$

$$E_0 = f^{-1}([l_0, l_1])$$

$$\mu E_0 = \mu_0$$

On a :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} l_i \lambda_{Ei} < f^+, \text{ d'où } \sum_{i=0}^{\infty} l_i \mu_i < \mathcal{I}(f^+) \\ - \sum_{i=-1}^{-\infty} l_i \lambda_{Ei} < f^-, \quad - \sum_{i=-1}^{-\infty} l_i \mu_i < \mathcal{I}(f^-).$$

La série $\sum_{i=-\infty}^{+\infty} l_i \mu_i$ est absolument convergent et vérifie

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} l_i \mu_i < \mathcal{I}(f) < \sum_{i=-\infty}^{+\infty} l_{i+1} \mu_i < \sum_{i=-\infty}^{+\infty} l_i \mu_i + \varepsilon \mathcal{I}(f)$$

ce qui établit le théorème.

CONCLUSION

Nous pensons avoir montré que les théories « modernes » de l'intégration ne s'opposent pas aux théories antérieures : la Science Mathématique ne se renie jamais, mais elle met l'accent sur ce qui n'était qu'inconscient ou implicite dans la Mathématique antérieure : ici, la linéarité et la continuité de l'intégrale. Il semble donc raisonnable de souhaiter que tout exposé actuel de la question — fût-ce au stade le plus élémentaire — mette en lumière ces propriétés fondamentales et, entre les diverses voies possibles, choisisse celles qui font intervenir le plus directement l'aspect linéaire du problème.

BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE

- H. LEBESGUE. — *Leçons sur l'intégration*, Paris, 1928.
P. HALMOS. — *Measure Theory*, New-York, 1950.
M. H. STONE. — Notes on Integration. *Proc. Mat. Ac. Sc. U.S.A.*, 34, 1948, et 35, 1949.
L. H. LOOMIS. — Linear functionals and content. *Amer. J. Math.*, t. 76, 1954, p. 168-182.
N. BOURBAKI. — *Fonctions d'une variable réelle*, Paris, 1949. *Intégration*, Paris, 1952.
M. ZAMANSKY. — *Introduction à l'algèbre et à l'analyse moderne*, 1958.
R. DEHEUVELS. — L'intégrale de Lebesgue. *Annales de l'Institut Fourier*, t. VII, 1957, p. 383-393.

QUELQUES GRANDES THÉORIES MATHÉMATIQUES INTERVENANT DANS LE CALCUL DES PROBABILITÉS

par E. MOURIER

*Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Poitiers **

Le calcul des probabilités a souvent ses méthodes qui lui sont propres et ceci, en particulier, est dû au fait que les probabilités sont des nombres compris entre zéro et un ; toutefois, il fait également intervenir de grandes théories mathématiques, et des plus modernes. Tout d'abord, il résulte de l'axiomatique même du calcul des probabilités, développée dans la conférence précédente, que toute loi de probabilité *est* une mesure finie ; les liens entre le calcul des probabilités et la théorie de la mesure sont alors si clairement en évidence qu'il est inutile d'insister sur ce point. Soulignons seulement le fait que c'est en tant que fonction d'ensembles complètement additive, définie sur une σ -algèbre (ou corps de Borel), de sous-ensembles d'un ensemble E , qu'une mesure s'identifie à une loi de probabilité sur E ; que l'existence et la définition d'une loi de probabilité sur E sont indépendantes de la définition d'une topologie sur E .

Un des premiers, et des plus importants problèmes qui se soient posés en calcul des probabilités, est celui de l'étude de la fréquence de la réalisation d'un événement A au cours de n expériences indépendantes, le résultat de chaque expérience étant soit la réalisation de A , de probabilité p , soit sa non-réalisation, de probabilité $q = 1 - p$ (cas de Bernoulli). Si on associe à chaque expérience la variable aléatoire X prenant les valeurs 1 ou 0 selon que A est réalisé ou non, la fréquence de A au cours des n expériences indépendantes est :

$$F = \frac{1}{n} [X_1 + X_2 \dots + X_n].$$

Or :

$$\begin{aligned} EX &= p \\ EX^2 &= p \end{aligned}$$

d'où :

$$E(F) = \sum_i \frac{EX_i}{n} = p.$$

$$\sigma^2(F) = E[F - E(F)]^2 = \frac{1}{n^2} \sum_i E(X_i - EX_i)^2 = \frac{p(1-p)}{n} = \frac{pq}{n}.$$

Il résulte donc de l'inégalité de Bienaymé :

$$\Pr [|X - EX| \geq \tau] \leq \frac{\sigma^2}{\tau^2},$$

que $\Pr [|F - p| \geq \tau] \leq \frac{n\tau^2}{pq}$ tend vers zéro lorsque $n \rightarrow +\infty$, c'est-à-dire que F converge en probabilité vers p .

* Conférence prononcée le 4 décembre 1958 à l'Institut H. Poincaré, et organisée par la Société Mathématique de France, en accord avec l'A.P.M., à l'intention spéciale des professeurs.

Ce résultat constitue la première et la plus simple « loi des grands nombres ». Le même raisonnement s'étend immédiatement à une variable aléatoire X quelconque ayant des moments du 1^{er} et du 2^e ordre.

$EX = m$, $E(X - EX)^2 = \sigma^2$, si $X_1, \dots, X_n$ sont n variables aléatoires indépendantes de même loi que X ,

$Y_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ converge en probabilité vers m , en effet

$$EY_n = m \text{ et } \sigma^2 Y_n = E[Y_n - EY_n]^2 = E[Y_n - m]^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

et par conséquent :

$$\Pr[|Y_n - m| \geq \tau^2] \leq \frac{\sigma^2}{n\tau^2}$$

donc Y_n converge en probabilité vers m .

Remarquons d'ailleurs que, pour démontrer cette convergence en probabilité, nous utilisons la propriété plus stricte :

$$\sigma^2 Y_n = E[Y_n - m]^2 = \frac{\sigma^2}{n} \text{ tend vers zéro lorsque } n \rightarrow +\infty,$$

qui, par définition même, exprime que la variable aléatoire Y_n converge en moyenne quadratique vers m ; ce résultat est la « loi des grands nombres en moyenne d'ordre 2 ».

En se rappelant qu'une variable aléatoire X est une application mesurable, $x(u)$, de l'espace probabilisé des épreuves $(\mathcal{U}, \mathcal{S}, \mu)$ dans l'espace $\mathbb{R}$ des nombres réels, la convergence en moyenne quadratique d'une suite de variables aléatoires est la convergence forte dans l'espace $L^2(\mathcal{U}, \mu)$ des fonctions réelles $x(u)$, $u \in \mathcal{U}$, de carré sommable par rapport à la mesure μ , la norme d'un élément $x \in L^2(\mathcal{U}, \mu)$ étant définie par :

$$\|x\| = \left[\int_{\mathcal{U}} |x(u)|^2 d\mu \right]^{1/2}$$

L'énoncé et la démonstration des lois des grands nombres rappelés ci-dessus semblent propres au calcul des probabilités. Un des problèmes essentiels du calcul des probabilités classique, c'est-à-dire concernant les variables aléatoires numériques, a été de préciser de telles lois des grands nombres et de remplacer les conditions énoncées ci-dessus : variables aléatoires indépendantes, de même loi, ayant des moments du 1^{er} et du 2^e ordre, par des conditions plus faibles.

On dit que des éléments aléatoires X_n forment une suite strictement stationnaire si, quel que soit l'entier positif s , quels que soient les entiers $n_1, n_2, \dots, n_s$ et quel que soit l'entier h , la loi de probabilité de l'élément complexe $(X_{n_1+h}, X_{n_2+h}, \dots, X_{n_s+h})$ ne dépend pas de h . Kolmogorov a montré que si des variables aléatoires X_i forment une suite strictement stationnaire et si EX_i existe (et alors EX_i ne dépend pas de i , du fait de la stationnarité), la moyenne arithmétique

$Y_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ tend, lorsque $n \rightarrow +\infty$, presque-sûrement vers une variable aléatoire limite Y telle que EY existe et que $EY = EX_i$.

Dans le cas particulier où les X_i sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi, Y se réduit à l'élément certain EX_i .

Ce théorème constitue la « *loi forte des grands nombres* ».

On s'aperçoit alors que résultats et méthodes font intervenir la *théorie ergodique*, dont l'origine ne se trouve pas en calcul des probabilités, mais dans l'étude des systèmes dynamiques.

La première *hypothèse* ergodique est relative au comportement des trajectoires, dans l'espace des phases, d'un système dynamique ; elle fut énoncée par Maxwell en 1850 : pour les systèmes ayant un très grand nombre de degrés de liberté, par exemple gaz de la théorie cinétique, la moyenne statistique est égale à la moyenne temporelle. Les premiers théorèmes ergodiques furent démontrés par G.-D. Birkhoff, I. Carleman, D.-O. Koopman, J. von Neumann, etc..., au sujet du comportement de moyennes de transformations. Depuis, cette théorie ergodique a connu un développement considérable, qu'il est impossible de résumer ici ; j'indiquerai seulement deux théorèmes essentiels, à savoir :

THÉORÈME ERGODIQUE DE BIRKHOFF : Soit Ω un ensemble d'éléments ω , pourvu d'une mesure bornée μ , on supposera $\mu(\Omega) = 1$. Soit φ une transformation (application biunivoque de Ω sur lui-même) conservant la mesure μ . Soit $\mathcal{F}$ l'espace de Banach des fonctions numériques réelles, $f(\omega)$, sommables μ sur Ω , avec la norme :

$$\|f\| = \int_{\Omega} |f(\omega)| \mu(d\omega).$$

Soit T l'opération linéaire dans $\mathcal{F}$ définie par :

$$Tf = f[\varphi(\omega)],$$

T est une opération bornée, $\|T\| = 1$.

THÉORÈME : Pour presque tout ω (au sens de μ),

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} (T^1 + T^2 + \dots + T^n) f(\omega) = \lambda(\omega)$$

existe, et $\lambda \in \mathcal{F}$.

Remarquons que les entiers $1, 2, \dots, n, \dots$ peuvent s'interpréter comme des temps (temps discret), et alors la moyenne arithmétique est la moyenne temporelle.

THÉORÈME ERGODIQUE DE YOSIDA ET KAKUTANI : Soit T un opérateur linéaire borné qui transforme un espace de Banach $\mathcal{X}$ en lui-même, et tel que T^n soit uniformément borné, c'est-à-dire qu'il existe un nombre C , indépendant de n , tel que $\|T^n\| \leq C$, $n = 1, 2, \dots$. Si pour tout $x \in \mathcal{X}$, la suite

$$\{x_n\} \text{ où } x_n = \frac{1}{n} [T + T^2 + \dots + T^n]x, n = 1, 2, \dots,$$

contient une sous-suite qui converge *faiblement* vers un point $\bar{x} \in \mathcal{X}$, la suite $\{x_n\}$ converge *fortement* vers $\bar{x}$.

Il faut noter que le théorème de Yosida et Kakutani est de nature beaucoup plus général que celui de Birkhoff, puisque les opérateurs linéaires T sont seulement astreints à ce que T^n est uniformément borné, alors que les opérateurs de Birkhoff sont de type très particulier et de

norme 1 ; d'autre part, le théorème de Yosida et Kakutani ne fait pas intervenir de mesure.

Kolmogorov eut le premier le mérite de montrer qu'il y a équivalence entre la loi forte des grands nombres pour des variables aléatoires et le théorème de Birkhoff.

Les recherches modernes en calcul des probabilités ont principalement pour objet de formuler des « lois des grands nombres », c'est-à-dire d'étudier le comportement asymptotique de

$$Y_n = \frac{1}{n} (X_1 + \dots + X_n),$$

non plus seulement pour des variables aléatoires, mais pour des éléments aléatoires X de nature quelconque et sous des hypothèses aussi générales que possible. La nature même du problème impose alors de considérer des éléments aléatoires à valeurs dans un espace vectoriel topologique ; d'autre part, une des généralisations les plus importantes de la notion de variable aléatoire est celle de fonction aléatoire qui intervient dans de nombreux problèmes tant pratiques que théoriques : problèmes posés par la théorie des télécommunications, de l'information, etc... Or, un moyen commode d'étudier une fonction aléatoire est de la considérer comme élément aléatoire à valeurs dans un espace approprié, dans de nombreux cas un espace L_p de Lebesgue. Par conséquent, la théorie des espaces vectoriels topologiques, et en particulier des espaces de Banach, intervient naturellement dans toute étude générale de lois des grands nombres. D'autre part, l'hypothèse de l'existence de EX , intervenant dans la loi forte des grands nombres, pour des variables aléatoires, nécessite la définition de l'espérance mathématique d'un élément aléatoire à valeurs dans un espace vectoriel topologique $\mathcal{X}$, et ainsi intervient la théorie de l'intégration d'une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{U}$ quelconque, à valeurs dans un tel espace $\mathcal{X}$.

Lorsqu'on considère des éléments aléatoires à valeurs dans un espace de Banach $\mathcal{X}$, il convient de se limiter aux applications $x(u)$ de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{X}$ telles que $\langle x^*, x(u) \rangle$ soit mesurable pour tout $x^* \in \mathcal{X}^*$ ($\mathcal{X}^*$ dual fort de $\mathcal{X}$) ; on dira alors que $X = x(u)$ est un L -élément aléatoire. Alors, par définition, l'espérance mathématique de X , EX , est l'élément de $\mathcal{X}$, s'il existe, tel que $\langle x^*, EX \rangle = E \langle x^*, X \rangle$ pour tout $x^* \in \mathcal{X}^*$, c'est-à-dire que EX est l'intégrale de Pettis de $x(u)$.

Alors, sans grandes difficultés, le théorème ergodique de Birkhoff permet de démontrer la « loi forte des grands nombres dans un espace de Banach » :

Si $\mathcal{X}$ est un espace de Banach, séparable, si $\{X_i\}$ est une suite strictement stationnaire de L -éléments aléatoires à valeurs dans $\mathcal{X}$ et si $E(\|X_i\|) < +\infty$, presque-sûrement, quand $n \rightarrow +\infty$, la moyenne tem-

porelle $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ tend fortement vers une limite Y qui est un

L -élément aléatoire à valeurs dans $\mathcal{X}$ et tel que $EY = EX_i$.

Si les X_i sont des éléments aléatoires indépendants de même loi, Y se réduit encore à l'élément certain EX_i .

Le théorème ergodique de Yosida et Kakutani ne faisant pas intervenir de mesure ne peut évidemment pas permettre d'obtenir une loi forte des grands nombres, c'est-à-dire une convergence presque-sûre. mais il permet d'établir une « loi des grands nombres en moyenne d'ordre α dans un espace de Banach ».

Si $\mathcal{X}$ est un espace de Banach séparable, si $\{X_i\}$ est une suite strictement stationnaire de L-éléments aléatoires à valeurs dans $\mathcal{X}$ et tels que $E(\|X\|^\alpha) < +\infty$, avec $1 \leq \alpha < +\infty$; il existe un L-élément aléatoire Y à valeurs dans $\mathcal{X}$, tel que $E(\|Y\|^\alpha) < +\infty$, $EY = EX_0$, et que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E\left(\left\|\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) - Y\right\|^\alpha\right) = 0.$$

Toutefois, ce théorème est loin de découler directement de celui de Yosida et Kakutani; sa démonstration nécessite en particulier l'étude d'un espace $\overset{a}{\mathcal{X}}$ associé à l'espace de Banach, séparable, $\mathcal{X}$, et des fonctionnelles linéaires définies sur $\overset{a}{\mathcal{X}}$.

$\overset{a}{\mathcal{X}}$ est défini de la façon suivante: tout L-élément aléatoire X à valeurs dans $\mathcal{X}$ et tel que $E(\|X\|^\alpha) < +\infty$ est considéré comme un élément $\overset{a}{X}$ d'un espace $\overset{a}{\mathcal{X}}$ normé en posant:

$$\|\overset{a}{X}\| = [E(\|X\|^\alpha)]^{1/\alpha}$$

ou encore $\overset{a}{\mathcal{X}}$ est l'espace constitué par les fonctions $X = x(u)$ telles que

$$\int_{\mathcal{U}} \|x(u)\|^\alpha d\mu < +\infty \text{ avec } \|\overset{a}{X}\| = \left[\int_{\mathcal{U}} \|x(u)\|^\alpha d\mu\right]^{1/\alpha}$$

ainsi défini $\overset{a}{\mathcal{X}}$ est un espace de Banach.

DÉCOMPOSITION D'UN NOMBRE PREMIER $P \equiv 1 \pmod{4}$ EN UNE SOMME DE DEUX CARRÉS

La démonstration du théorème de Bachet (A.P.M. 198) repose en partie sur la proposition suivante : Tout nombre premier $p \equiv 1 \pmod{4}$ est égal à une somme de deux carrés. Voici une démonstration élémentaire assez peu connue de cette proposition.

Soit l'équation $x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{p}$ dans $\mathbb{Z}$ [p premier tel que $p \equiv 1 \pmod{4}$] x et y premiers avec p . On peut trouver a tel que $x \equiv ay \pmod{p}$. En effet,

$$a^2 y^2 + y^2 \equiv y^2 (a^2 + 1) \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow a^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p} \text{ car } (y, p) = 1.$$

Cette dernière congruence est possible puisque par hypothèse $\left(\frac{-1}{p}\right) = +1$.

Des solutions de $x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{p}$ sont donc de la forme $x = av + pu$
 $y = v$, u et v entiers quelconques de $\mathbb{Z}$.

Ce résultat peut s'interpréter dans un système orthonormé. M étant le point figuratif d'un couple-solution $\vec{OM} = v\vec{A} + u\vec{B}$ $\vec{A}(a, 1)$ $\vec{B}(p, 0)$.

Les points figuratifs des couples-solutions appartiennent donc à un réseau R construit sur les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

Chaque parallélogramme du réseau R a une aire égale à p . Convenons d'associer à chaque parallélogramme un point de ce réseau, par exemple le sommet tel que

$$\begin{pmatrix} x \text{ minimum} \\ y \text{ minimum} \end{pmatrix}$$

Soit un cercle $[O, R]$ R assez grand contenant N sommets. Il existe un cercle de rayon $R + b > R$ aussi petit que possible et de centre O contenant les parallélogrammes dont les sommets sont intérieurs à $[O, R]$.

Il existe aussi un cercle de rayon $R - a > R$ aussi grand que possible et de centre O complètement intérieur aux parallélogrammes coupés par $[O, R]$; a et b majorés par $|\vec{OA} + \vec{OB}|$.

$$\begin{aligned} \text{D'où} \quad & \pi(R - a)^2 \leq Np \leq \pi(R + b)^2, \\ & \frac{\pi}{p} \left(1 - \frac{a}{R}\right)^2 \leq \frac{N}{R^2} \leq \frac{\pi}{p} \left(1 + \frac{b}{R}\right)^2 \\ & \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{N}{R^2} = \frac{\pi}{p}. \end{aligned}$$

Ceci posé, soit $I[x_0, y_0]$ le point du réseau le plus proche de l'origine, s sa distance à l'origine, c'est-à-dire la distance minimum entre deux points du réseau $s^2 = x_0^2 + y_0^2$.

Considérons les cercles centrés en chaque point du réseau et de rayon au plus égal à $\frac{s}{2}$. Cercles qui seront donc extérieurs les uns aux autres. Pour les cercles dont les centres sont intérieurs au cercle $[O, R]$ on a

$$N\pi\left(\frac{s}{2}\right)^2 < \pi(R + b)^2 \Rightarrow s^2 < 4 \frac{R^2}{N} \left(1 + \frac{b}{R}\right)^2$$

donc à la limite $s^2 < \frac{4p}{\pi} < 2p$

et s^2 étant multiple de p on a nécessairement $s^2 = p = x_0^2 + y_0^2$.

J. QUERRÉ (Brest).

EXEMPLE D'UN PROCÉDÉ DE GÉNÉRALISATION EN ALGÈBRE SCOLAIRE

Un des plus éminents mathématiciens polonais, Stefan Banach, disait : « *Un mathématicien, c'est celui qui sait trouver des analogies d'un théorème à un autre ; un meilleur mathématicien, c'est celui qui perçoit les analogies de démonstrations ; celui qui voit les analogies de théories se place encore plus haut ; on pourrait même imaginer quelqu'un qui saisisrait des analogies d'analogies.* »

L'esprit de l'analogie pénètre les Mathématiques modernes. Nous en trouvons un clavier étendu, depuis les ressemblances intuitives et encore assez vagues jusqu'aux isomorphismes.

L'élève d'une école secondaire n'est pas et ne deviendra probablement pas un mathématicien professionnel, sauf de rares exceptions. Mais il vit et il vivra dans une civilisation technologique qui, de nos jours, est imprégnée jusqu'au fond par la pensée mathématique moderne. Un reflet de cette pensée peut et doit se trouver dans l'enseignement. C'est pourquoi une de nos tâches importantes est de rendre nos élèves sensibles aux analogies et d'ouvrir leur pensée et leur imagination aux généralisations, naïves encore peut-être, mais pleines de valeur éducative.

La modernisation de l'enseignement des Mathématiques est à l'ordre du jour. Ce qui la freine encore souvent, ce sont les malentendus concernant le sens même de cette évolution. On ne voit souvent dans cette modernisation que la recherche « à tout prix » d'originalités, même si elles sont stériles et un procédé de formalisation du cours inaccessible à l'élève moyen.

Pour écarter ces malentendus, il faut montrer, à l'aide d'exemples précis, que ce sont avant tout les procédés simples et naturels pour les élèves qui les rapprochent des Mathématiques modernes, et que ces procédés peuvent être trouvés dans le cadre des matières traditionnelles. Mon intention est de donner un exemple de ce genre. Il concerne des notions et des théorèmes bien connus et présentés dans les manuels scolaires. Il me semble pourtant qu'il est possible de les traiter d'une manière qui exprime déjà une « optique nouvelle », tout en restant dans le cadre du cours conventionnel.

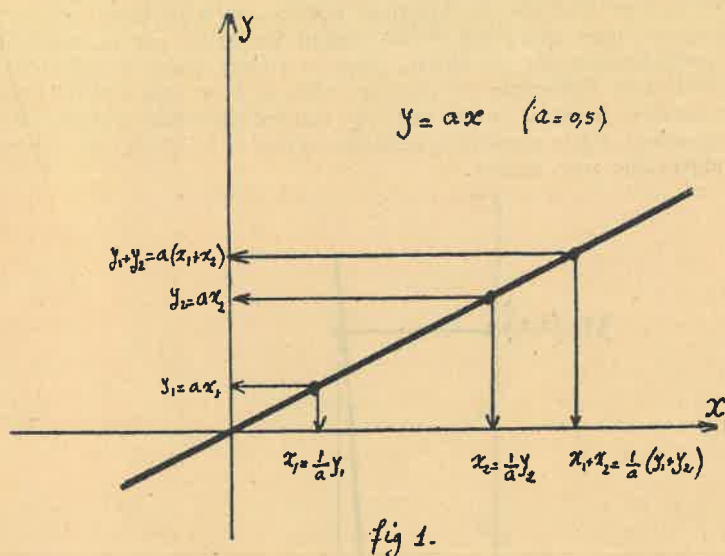
Dans « l'algèbre » scolaire, — qui n'est pas une algèbre au sens moderne du mot —, l'idée générale de correspondance est surtout réalisée traditionnellement par la notion de fonction numérique. L'élève ne reconnaît, comme fonctions, que celles qui sont introduites « officiellement » par le maître et son manuel ; le plus souvent, il ne reconnaît pas d'autres modes de correspondance. Malgré leur position privilégiée, ces fonctions « officielles », sources fécondes d'idées modernes, sont-elles exploitées comme elles devraient l'être dans l'enseignement ?

Voici un exemple de généralisation suggéré par des analogies reconnues par des élèves au cours d'une étude de ces fonctions.

1. — En élaborant les propriétés de la fonction linéaire, les élèves découvrent l'additivité de la fonction $y = ax$ (en Pologne, il s'agit d'élèves de 14 ans, classe de VIII^e). Ce fait est illustré par le schéma suggestif du diagramme de cette fonction

(fig. 1). Les élèves conçoivent facilement que la fonction $x = \frac{1}{a} y$ ($a \neq 0$) appartient « à la même famille ». Ils constatent qu'on peut exécuter « l'addition sur l'axe des y » en exécutant « l'addition sur l'axe des x » et vice versa. Ils mettent ce fait en

évidence sur un modèle qu'il est facile d'imaginer d'après le diagramme de la figure 1 : le point de départ des flèches glisse sur la droite $y = ax$ ($a \neq 0$). En décrivant les deux échelles x et y , liées par cette correspondance biunivoque qui conserve l'addition, les élèves expriment dans leur langage usuel la signification précise de l'isomorphisme en jeu.



2. — A une autre étape du cours, on introduit la notion de radical arithmétique en tant que racine non négative de l'équation $x^n = y$. Les élèves esquissent le diagramme de la fonction $y = x^n$ ($x > 0$), par exemple, pour $n = 2$ et $n = 3$ (fig. 2). Ils interprètent ce diagramme pour la fonction $x = \sqrt[n]{y}$ ($y \geq 0$). Rien qu'en se servant du diagramme en tant que schéma et en se référant aux propriétés connues de la puissance, les élèves décrivent la propriété de la fonction $y = x^n$ et de la fonction $x = \sqrt[n]{y}$ qui correspond à la propriété mise en évidence précédemment sur la fonction linéaire : pour $n > 1$, les fonctions $y = x^n$ et $x = \sqrt[n]{y}$ ne sont pas additives mais multiplicatives. De même, pour $n = 1$, on retrouve la fonction « banale » $y = x$ qui est additive et multiplicative en même temps. Elle est l'élément unique commun des deux familles $y = ax$ et $y = x^n$.

Ainsi les élèves saisissent-ils d'un seul acte de l'imagination et de la pensée certains théorèmes sur les radicaux ; ces résultats sont illustrés sur le diagramme : lorsque le point glisse sur la courbe $y = x^n$, les flèches montrent que les fonctions $y = x^n$ et $x = \sqrt[n]{y}$ traduisent une multiplication par une multiplication et les deux échelles se correspondent dans un nouvel isomorphisme. Ce mot savant est encore inconnu, bien sûr, mais sa signification dérive déjà de la situation étudiée.

3. — Quand on introduit la notion de puissance d'un nombre, l'exposant étant un nombre réel, on définit en même temps la notion de logarithme (il s'agit ici d'élèves de 16 ans). L'élaboration simultanée des opérations mutuellement inverses garantit une maîtrise plus profonde, plus active, plus durable des idées en jeu. L'étude de la fonction $y = a^x$ et de son diagramme crée une situation analogue à

celle qui a déjà été considérée deux fois. Les élèves sont préparés à faire une découverte plus intéressante que les précédentes. Ils considèrent simultanément les fonctions $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) et $x = \log_a y$. La correspondance établie par le glissement d'un point sur la courbe et les flèches donne immédiatement la formule fondamentale

$$\log_a y_1 y_2 = \log_a y_1 + \log_a y_2 \quad (\text{fig. 3}).$$

Les élèves constatent que les fonctions étudiées ne sont, cette fois, ni additives ni multiplicatives, mais que l'une d'elles traduit l'addition par la multiplication et l'autre la multiplication par l'addition. Ainsi se trouve établi l'isomorphisme entre le groupe additif de l'ensemble des nombres réels et le groupe multiplicatif de l'ensemble des nombres positifs. Encore une fois, cela est saisi d'un seul acte de la pensée et de l'imagination, d'une manière synthétique, grâce à la révélation naturelle de la structure algébrique sous-jacente.

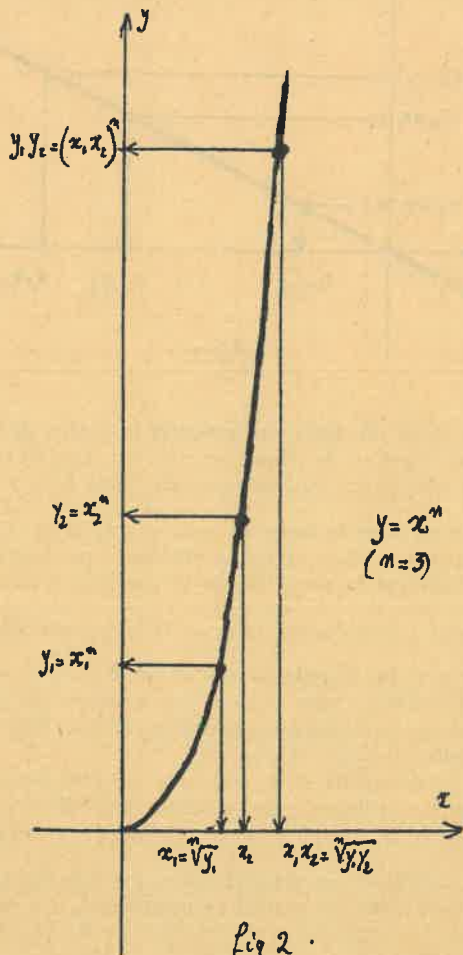


Fig 2 .

On résume les acquisitions précédentes au cours d'une confrontation générale : les fonctions

$$y = ax ; y = x^a \quad (x > 0),$$

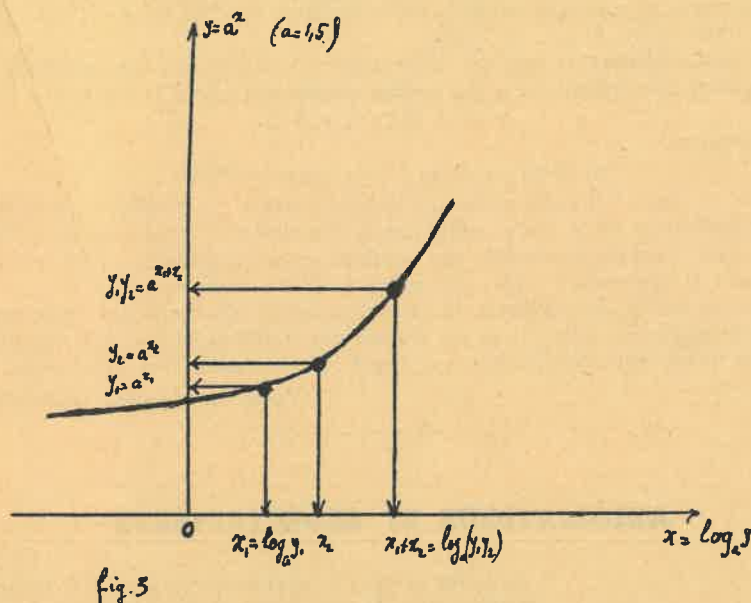
$$y = a^x \quad (a > 0) ; y = \log_a x \quad (a > 0, a \neq 1, x > 0),$$

satisfont respectivement aux équations :

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) ; \quad f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2),$$

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2) ; \quad f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) + f(x_2).$$

On s'efforce alors d'exprimer l'analogie renfermée dans ces formules par une seule formule. Il suffit d'introduire conventionnellement les symboles $+$ et $\cdot$ pour écrire $f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) + f(x_2)$: c'est la généralisation cherchée*.



4. — Si le champ des questions nouvelles ne s'ouvre pas en classe, il est encore possible de l'ouvrir largement dans les séances du club mathématique des élèves. On se demande par exemple, si les fonctions étudiées précédemment sont les seules solutions des équations obtenues. Et les autres fonctions biunivoques définies dans l'ensemble des réels, comment traduisent-elles l'addition et la multiplication ? On prend un exemple très simple, celui de la fonction $y = ax + b$ ($a \neq 0$). Le schéma avec les flèches et le point mobile sur la courbe conduisent à la découverte de deux opérations nouvelles $y_1 + y_2 = y_1 + y_2 - b$ $y_1 \cdot y_2 = \frac{(y_1 - b) \cdot (y_2 - b)}{a} + b$, le

« zéro » ou élément neutre de la première est égal à b ; « l'unité » ou élément neutre de la seconde est $a + b$. L'isomorphisme garantit leur commutativité et leur associativité, ainsi que la distributivité de la multiplication nouvelle par rapport à l'addition nouvelle. Les élèves découvrent ainsi une arithmétique un peu « étrange ». On trouve

$$y_1 - y_2 = y_1 - y_2 + b,$$

$$y_1 : y_2 = a \frac{y_1 - b}{y_2 - b} + b.$$

On constate que, grâce à la correspondance établie, on peut, « sans danger » profiter formellement des lois connues de l'arithmétique ordinaire, par exemple :

$$[y_1 + y_2] \cdot [y_1 - y_2] = y_1 \cdot y_1 - y_2 \cdot y_2.$$

* On remarquera bien que les symboles $+$ et $\cdot$ sont imprimés en gras et qu'ils ont ici une signification nouvelle ou « généralisée » (N.D.L.R.).

En se servant des symboles des nombres avec leur signification usuelle l'élève calcule (par exemple avec $y = x + 1$)

$$2 + 2 = 3 ; \quad 0 \cdot 0 = 0 ; \quad 0 + 0 = -1 ; \quad 1 + 1 = 1, \text{ etc...}$$

ce qui est très amusant. Mais on peut employer les symboles autrement, en désignant par x les nombres correspondant à x . On obtient alors les formules

$$2 + 2 = 4 ; \quad 0 \cdot 0 = 0 ; \quad 1 + 1 = 2$$

et on constate une analogie complète entre les deux échelles vis-à-vis des opérations $+$ et $\cdot$ d'une part, $+$ et $\cdot$ de l'autre.

On peut continuer ce jeu très intéressant : « Cherchez une addition et une multiplication non ordinaires. » On revient encore une fois à la fonction

$$y = a^x \quad (a > 0, a \neq 1).$$

On trouve

$$y_1 + y_2 = y_1 \cdot y_2 \quad y_1 \cdot y_2 = y_1 \log_a y_2.$$

Ici le « zéro » élément neutre de l'addition est 1 ; « l'unité », élément neutre de la multiplication est a . On constate que la fonction $y = a^x$ « resserre » le corps des réels (par exemple, l'ensemble des nombres négatifs devient, si $a > 1$, le « segment »]0 ; 1[seulement) ; mais elle conserve la structure de corps.

Ainsi se profile, dans l'esprit de l'élève, la notion du corps des réels, notion un peu plus générale que celle qui en est donnée par tradition, et les jeunes gens acquièrent l'idée qu'un outil magique leur est donné : la correspondance biunivoque.

Zofia KRYGOWSKA (Cracovie).

AXIOMATIQUE ET REDÉCOUVERTE *

« Je me permets de vous donner le conseil de reprendre les premiers mots de cette science et de considérer en vous-même les problèmes les plus élémentaires (en apparence). Ces prémisses sont d'ailleurs une source perpétuelle de réflexion et de découvertes pour les maîtres. »

Paul VALÉRY.

I. — A PIED D'ŒUVRE

« Le sage choisit d'ignorer beaucoup. »
ALAIN.

Nous nous proposons de présenter à nos élèves les objets mathématiques : points, nombres, vecteurs, transformations... Une question se pose immédiatement : « Qu'est-ce qu'un objet mathématique ? »

Les objets du monde sensible.

Pour y répondre considérons un objet du monde sensible, une règle par exemple. Sous son aspect modeste, cette règle recèle une extrême richesse de propriétés : longueur, largeur, épaisseur, masse, âge, couleur, position, procédés de fabrication, occasions d'utilisation, constitution par fibres, cellules, molécules, atomes, noyaux et électrons... ; ici, je m'arrête admiratif mais intimidé, car le moindre objet du monde sensible est terriblement compliqué.

* Conférence faite au Centre Pédagogique Régional de Paris (novembre 1958).

Les objets mathématiques.

Que fait alors le mathématicien ? Il *choisit* quelques propriétés *ignorant* volontairement toutes les autres, puis à l'aide de ces propriétés dûment sélectionnées il reconstruit un être de raison : l'objet mathématique. Créé par ce travail d'abstraction schématisante, l'objet mathématique (ou abstrait), contrairement à l'objet sensible (ou concret), est d'une admirable simplicité. On est donc impardonnable de ne pas comprendre les Mathématiques ; en effet, si l'on ne comprend ce qui est simple comment peut-on comprendre ce qui est compliqué ?

Les ensembles.

Examinons la notion de propriété. Comment prenons-nous conscience d'une propriété ? En faisant une *expérience*, c'est-à-dire en confrontant l'objet étudié à d'autres objets. Par conséquent, l'objet mathématique ne peut se concevoir seul, il est essentiellement sociable. Je ne puis, *a priori* tout au moins, définir un point isolé, un nombre isolé, un vecteur isolé, une transformation isolée, mais je sais définir une *configuration ponctuelle*, une *collection numérique*, un *espace vectoriel*, une *famille de transformations*. Nous étudions des *ensembles* et les objets mathématiques nous sont connus comme *éléments* de ces ensembles.

Les lois.

Le joueur s'apprête à faire une partie d'échecs, que doit-il connaître ? La règle du jeu. L'ouvrier prend place devant sa fraiseuse, que doit-il savoir ? Le mode d'emploi. Le conducteur novice veut prendre la route, que doit-il apprendre ? Le code. Je suis un simple citoyen, que suis-je censé ne pas ignorer ? La loi. Transportons ces constatations dans le domaine mathématique : je veux étudier un ensemble, que dois-je connaître ? Les lois qui régissent cet ensemble.

Axiomes et structures.

De même que les objets vivent en société, les lois ne se présentent pas isolément ; une société est régie par une constitution et les lois sont les articles de cette constitution. En Mathématiques les lois sont appelées « *axiomes* » et les constitutions sont appelées « *structures* ». En principe, une théorie mathématique est l'étude d'une certaine collection nommée « *ensemble de base* », ou encore « *réfèrentiel* » de la théorie, cette collection étant douée d'une certaine « *structure* » exprimée par une liste « d'axiomes ».

L'axiome-évidence des anciens.

Lorsqu'on consulte un très vieil ouvrage de Mathématiques on rencontre les définitions suivantes : « On appelle axiome une proposition évidente par elle-même, on appelle postulat une proposition admise sans démonstration. » Les anciens distinguaient donc les axiomes, vérités évidentes, et les postulats, vérités admises. Le mot axiome était péremptoire : « J'estime que... », le mot postulat était plus modeste : « Je vous demande d'admettre que... ». Ce point de vue fit autorité jusqu'au début du XIX^e siècle, époque où l'on croyait encore à l'existence d'une seule géométrie : la géométrie euclidienne à trois dimensions.

L'axiome-postulat du XIX^e siècle.

Mais lorsqu'on eut découvert l'existence d'autres géométries, géométries de Lobatchefski, de Riemann, géométries affines, projectives, projectives complexes..., le préjugé de l'évidence axiomatique s'effaça comme s'effacèrent jadis le préjugé de la verticale absolue et celui de l'immobilité absolue. C'est ainsi qu'au XIX^e siècle les mots « axiome » et « postulat » sont devenus rigoureusement synonymes.

L'axiome-loi du XX^e siècle.

Plaçons-nous dans le domaine concret ; la proposition : « Tout véhicule doit tenir sa droite », est-elle évidente ? Non, elle est une simple loi du code de la route français, mais elle n'a pas force de loi en tous pays. Revenons au domaine mathématique ; la proposition : « Une droite partage le plan en deux demi-plans » est-elle évidente ? Non, elle est une loi du plan euclidien, mais elle n'est pas une loi du plan projectif. Les axiomes sont donc essentiellement législatifs ; mieux, les objets s'effaçant devant les relations, ce sont les lois qui font maintenant les citoyens et l'on peut énoncer : « *Un système d'axiomes est un ensemble de lois constituant une définition implicite et permanente des êtres qu'on se propose d'étudier.* »

La science des lois.

Dans le domaine social il existe une science des lois, on l'appelle « le droit ». En Mathématique il existe aussi une science des lois, on l'appelle « l'axiomatique ». L'homme moyennement cultivé ne peut pas, en général, étudier le droit, mais il doit cependant connaître les lois qui conditionnent sa façon de vivre. Il en est de même en ce qui nous concerne, nous ne pouvons pas toujours étudier l'Axiomatique qui est affaire de savants, mais nous avons le devoir de connaître et de faire connaître à nos élèves les axiomes qui sont à la base de notre enseignement.

II. — L'AXIOMATIQUE TRADITIONNELLE

« C'est dans l'exposé des premiers principes qu'il faut éviter trop de subtilité : des axiomes, il faut bien en admettre et si l'on en admet un peu plus qu'il n'est logiquement nécessaire, le mal n'est pas bien grand. »

Henri POINCARÉ.

Inspiratrice de notre enseignement le plus traditionnel, l'axiomatique euclidienne fut repensée par Hilbert à l'orée du xx^e siècle. Nous ne pouvons, certes, la présenter dans le style hilbertien, austère et magnifique, mais trop différent du langage du petit écolier 1959. Nous ne pouvons pas non plus atteindre pleinement son admirable simplicité. En effet, une axiomatique réduite à sa plus simple expression exige une mise en marche déductive trop lente pour de jeunes esprits justement impatients ; nous acceptons donc une raisonnable surabondance.

Le référentiel.

L'ensemble de base, autrement dit le référentiel de la géométrie euclidienne, est appelé « espace euclidien ». Ses éléments sont appelés points et parmi ses sous-ensembles nous distinguons plus particulièrement les « droites » et les « plans ». Points, droites et plans obéissent conjointement aux axiomes de la géométrie euclidienne. Ces axiomes peuvent se répartir en cinq classes :

- 1° axiomes d'appartenance ;
- 2° axiomes de séparation ;
- 3° axiomes d'équivalence ;
- 4° axiomes de parallélisme ;
- 5° axiomes de continuité.

Cette liste d'axiomes constitue la définition implicite des points, des droites, des plans et de l'espace euclidien lui-même dont elle dessine la structure.

Axiomes d'appartenance.

1° *Existences ponctuelles.* — Dans une droite existent au moins deux points distincts A et B. Dans un plan existent au moins trois points non alignés A, B, C. Dans l'espace existent au moins quatre points non coplanaires ABCD.

2° *Détermination d'une droite.* — Etant donnés deux points distincts A et B, il existe une droite contenant ces deux points et il n'en existe qu'une.

3° *Détermination d'un plan.* — Etant donnés trois points non alignés A, B, C, il existe un plan contenant ces trois points et il n'en existe qu'un.

4° *Inclusion d'une droite dans un plan.* — Si une droite (D) et un plan (P) ont deux points communs distincts A et B, la droite (D) est incluse dans le plan (P).

5° *Intersection de deux plans.* — Si deux plans (P) et (P') ont un point commun A, ils en ont nécessairement un second B distinct du premier (il en résulte qu'ils ont une droite commune : la droite AB).

Ces axiomes d'appartenance sont magnifiquement actifs ; nous pensons au cordeau que l'on tend, à la tablette que l'on immobilise, à la règle que l'on applique sur la planche, à la feuille que l'on plie ; tout homme qui travaille de ses mains en fait un usage constant. L'axiomatique apparaît alors comme une codification d'expériences vécues.

Mais si l'action est abondante, sa codification est sobre, et la rédaction de ces premiers axiomes est l'occasion de concevoir la Mathématique comme un langage. Le verbe « exister », le verbe « appartenir », les noms « inclusion », « intersection », se présentent d'emblée dans leur acception la plus vigoureuse.

Axiomes de séparation.

1° *Ordre total.* — Une droite est un ensemble totalement ordonné.

Cet axiome introduit sur la droite une relation que l'on peut indiquer par le verbe « précéder » et que l'on peut codifier comme suit :

a) A et B étant distincts, ils vérifient, soit l'éventualité « A précède B », soit l'éventualité « B précède A ».

b) Les hypothèses « A précède B » et « B précède C » entraînent conjointement « A précède C » (Relation transitive).

A partir de l'axiome d'ordre total on peut définir la notion de demi-droite (commençante ou finissante) et la notion de segment.

2° *Demi-plans.* — Une droite sépare le plan en deux ensembles convexes appelés demi-plans.

Le verbe « séparer » rappelle le fait suivant : si on marque A dans un demi-plan, B dans l'autre, le segment AB coupe la droite de séparation.

L'adjectif « convexe » rappelle le fait suivant : si on marque deux points A et C dans un même demi-plan le segment AC est inclus dans ce demi-plan.

A partir de l'axiome des demi-plans on peut définir la notion d'angle saillant (intersection de deux demi-plans) et la notion d'angle rentrant (réunion de deux demi-plans).

Deux concepts fondamentaux interfèrent dans ces énoncés : la notion d'ordre et l'idée de convexité.

L'ordre est partout présent. Dites à votre élève d'ouvrir n'importe lequel de ses livres de classe, à n'importe quelle page, il y trouvera une relation d'ordre : ordres alphabétique, lexicographique, chronologique, généalogique, ordre des classifications animales et végétales, ordre des ères géologiques, ordre des éléments dans le tableau de Mendeleïeff, ordre grammatical, ordre syntaxique. Voyez ce fleuve avec ses villes riveraines vers l'amont ou vers l'aval, voyez ce réseau ferré avec ses stations, voyez

la société médiévale avec ses vassaux et ses suzerains, voyez enfin ce tribun s'adressant au peuple, il réfléchit et son discours s'ordonne partiellement (argumentation), il parle et son discours s'ordonne totalement (suite des mots).

Quant à la convexité, son efficacité apparaîtra peu à peu, mais vous pouvez déjà la rendre sensible en évoquant ces photographies aériennes où apparaissent, dans un même cadre, de grands lacs ou de larges plages concaves ou convexes.

Axiomes d'équivalence (segments).

Dans l'ensemble des segments on peut définir une relation :

« AB est superposable à CD »

vérifiant les axiomes suivants :

1° *Equivalence*. — La relation « AB est superposable à CD » est réflexive, symétrique, transitive. En bref, elle est une équivalence.

Dans une théorie des segments on prend comme référentiel l'ensemble des classes de cette équivalence, ce qui permet de tenir pour synonymes les mots « superposable » et « égal » et d'écrire $AB = CD$.

2° *Transport*. — Sur une demi-droite Ox , il existe un point M et un seul tel que $OM = AB$ (segment donné).

3° *Non-orientation*. — On regarde comme égaux deux segments ayant mêmes extrémités, à l'ordre près : $AB = BA$.

4° *Addition*. — Soient sur une droite Δ trois points A, B, C (B étant entre A et C) et sur une droite Δ' trois points A', B', C' (B' étant entre A' et C'). On admet l'implication

$$\left\{ \begin{array}{l} BC = B'C' \\ AB = A'B' \end{array} \right\} \Rightarrow AC = A'C'.$$

Ce dernier axiome permet de munir l'ensemble des segments d'une loi de composition : l'addition des segments.

Axiomes d'équivalence (angles et triangles).

Une présentation analogue à la précédente permet de définir axiomatiquement l'égalité (ou possibilité de superposition) des angles. Il convient alors de réaliser la synthèse des deux structures en codifiant la cohabitation des angles et des segments dans l'espace euclidien. Hilbert y parvient en postulant partiellement l'un des cas d'égalité des triangles.

Soient a, b, c, A, B, C les côtés et les angles d'un triangle, soient a', b', c', A', B', C' les côtés et les angles d'un autre triangle, l'axiome de Hilbert est le suivant :

Axiome du triangle. — Les égalités $A = A', b = b', c = c'$, entraînent conjointement les égalités $B = B'$ et $C = C'$.

On peut, à partir de cet axiome, démontrer l'égalité $a = a'$, et les deux autres cas d'égalité des triangles, mais les démonstrations sont extrêmement délicates. Aussi je pense que nous pouvons, sans aucun remords, postuler l'équivalence logique :

$$\left\{ \begin{array}{l} b = b' \\ A = A' \\ c = c' \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} B = B' \\ a = a' \\ C = C' \end{array} \right\}$$

Ainsi se trouvent admis, sans démonstration, deux cas d'égalité des triangles (j'avoue même timidement que j'admets le troisième). En tout cas, il convient d'éviter la « fureur déductive » qui consiste à faire croire à de petits enfants qu'ils peuvent, intégralement, démontrer les trois cas, alors que M. Hilbert lui-même, en sa grande science, se reconnaissait incapable d'une telle prouesse. Il est vrai que les grands savants sont plus modestes que les petits.

Il peut être bon, à un certain instant, de rencontrer les cas d'égalité ; on dispose d'un jeu de six cartes et lorsqu'on choisit habilement trois d'entre elles, on enlève les trois autres. Il ne faut cependant pas abuser de ce jeu, car les élèves trop exclusivement nourris de cas d'égalité risquent de se trouver, plus tard, paralysés lorsqu'on envisagera pour eux d'autres modes de pensée.

Axiome de parallélisme.

On dit que deux droites sont parallèles (au sens large) lorsqu'elles vérifient les conditions suivantes :

- 1° Elles sont situées dans un même plan.
- 2° Elles sont, soit disjointes, soit confondues.

L'étude de telles droites est commandée par l'énoncé suivant :

Axiome de parallélisme. — Etant donnés une droite (Δ) et un point A, il existe une droite (Δ') parallèle à (Δ) et contenant A, et il n'en existe qu'une.

Dans cet énoncé, il est répondu à deux questions, la question d'existence et la question d'unicité. Cependant, si l'étude du parallélisme suit celle de l'appartenance, de la séparation et de l'égalité, on peut, par interférence des trois premières listes d'axiomes, démontrer l'existence de Δ' et postuler simplement son unicité. La démonstration d'existence est vénérable, car elle date d'Euclide lui-même, elle est intéressante, mais très difficile ; on prouve d'abord qu'un angle extérieur d'un triangle est supérieur à chacun des angles intérieurs qui ne lui sont pas adjacents, on en déduit que si Δ et Δ' forment avec une sécante (et d'un même côté) des angles intérieurs supplémentaires, elles ne peuvent se couper.

L'existence de Δ' étant ainsi démontrée, l'axiome d'unicité prend la forme suivante :

« Si (Δ) et (Δ') forment avec une sécante (et d'un même côté) des angles internes, dont la somme est inférieure à deux droites, (Δ) et (Δ') se coupent. »

On peut cependant adopter un ordre d'exposition différent et présenter le parallélisme avant l'égalité, il est alors nécessaire de postuler, non seulement l'unicité de Δ , mais aussi son existence.

L'axiome étudié introduit, dans l'ensemble des droites, une relation dite de parallélisme. Cette relation, d'après sa définition même, est réflexive et symétrique. Elle est aussi transitive, en voici la démonstration en géométrie plane :

Considérons deux droites (Δ') et (Δ'') séparément parallèles à une même droite (Δ). De deux choses l'une :

1° Ou bien (Δ') et (Δ'') n'ont aucun point commun, elles sont disjointes.

2° Ou bien (Δ') et (Δ'') ont un point commun, elles sont alors confondues en raison de l'axiome de parallélisme.

Dans tous les cas, (Δ') et (Δ'') sont parallèles et la transitivité se trouve démontrée. La relation de parallélisme est donc une relation d'équivalence, ce qui justifie la notation : « $\Delta' \parallel \Delta''$ ».

Axiomes de continuité. (Axiomes de la mesure).

Axiome d'Archimède. — Etant donnés deux segments non nuls U et V, il existe un nombre naturel p tel que $pU > V$.

Cet axiome permet l'existence d'un nombre naturel n , tel que

$$n \cdot U \leq V < (n + 1) U,$$

autrement dit, il donne la clef de la « mesure approchée ».

Axiome de Cantor. — Soient deux suites de segments :

$$\underbrace{U_1 \leq U_2 \leq U_3 \leq U_4 \leq \dots \leq \dots}_{\text{les segments } U_n} \quad \underbrace{\leq U'_4 \leq U'_3 \leq U'_2 \leq U'_1}_{\text{les segments } U'_n}$$

vérifiant les quatre hypothèses suivantes :

- 1° Chaque segment de la première suite est supérieur ou égal à son précédent.
- 2° Chaque segment de la seconde suite est inférieur ou égal à son précédent.
- 3° Chaque segment de la première suite est inférieur ou égal à chaque segment de la seconde.
- 4° On peut trouver un indice n tel que le segment $U'_n - U_n$ soit plus petit qu'un segment non nul quelconque donné à l'avance.

Il existe alors un segment V supérieur ou égal à tout segment de la première suite et inférieur ou égal à tout segment de la seconde.

Un espace où ces deux axiomes sont conjointement vérifiés est appelé « espace archimédien complet ». Il en est ainsi de l'espace euclidien.

On peut d'ailleurs remplacer les deux axiomes précédents par un seul au prix d'une étude minutieuse de la notion d'ordre.

Soit sur une droite (Δ) un sous-ensemble ponctuel (E) . On dit que (E) est « majoré » et qu'il admet pour majorant A si chaque point de (E) précède, au sens large, A . On admet alors que, parmi les majorants de (E) , il en est un P qui précède tous les autres. P est appelé : *premier majorant* ou *majorant minimum* ou *borne supérieure précise* de (E) , d'où l'énoncé.

Axiome du premier majorant. — Si un ensemble (E) de points alignés est majoré, cet ensemble (E) admet un premier majorant.

Considérons alors l'inégalité

$$nU < V$$

On en déduit

$$(n-1)U < V - U$$

donc, si la suite des multiples de U est majorée par V , elle est aussi majorée par $V - U$, ainsi elle n'admet pas de premier majorant, ce qui lui interdit l'existence de tout majorant et prouve l'énoncé d'Archimède. Quant à l'énoncé de Cantor, il présente V comme borne précise commune des U et des U' .

Plus difficiles que les axiomes des autres catégories, les énoncés de continuité doivent être réservés aux grands élèves, ce qui n'interdit pas les allusions concrètes. L'axiome d'Archimède est un lasso, l'axiome de Cantor en est le nœud coulant : quant à l'axiome du premier majorant, il sera bien compris de tous les fervents d'alpinisme. Nous sommes alors à l'âge du grand sport tonifiant et salutaire.

III. — LA METHODE DE REDECOUVERTE

« Enseigner, c'est apprendre deux fois. »

J. JOUBERT.

La Mathématique, langue des sciences et science de la rigueur, possède une réputation d'inflexible dureté ; mais pour sa présentation, nous disposons d'une méthode incontestablement efficace et vive : la « *méthode de redécouverte* », introduite dans notre enseignement par l'Inspecteur général Blutel et presque partout adoptée depuis une trentaine d'années.

La méthode dogmatique.

Certains d'entre nous, parmi les plus anciens, ont connu la vieille méthode dogmatique. Autoritaire, le théorème s'énonçait ; docile, la démonstration suivait ; toute sèche, l'affreuse estampille C.Q.F.D. fermait la marche. Pour résister à une telle

discipline, il fallait des dons spéciaux et les pratiquants de cette méthode lui trouvaient au moins un avantage, celui d'opérer parmi les élèves une sévère sélection.

La méthode de redécouverte.

Bien différente est la méthode de redécouverte, appelée aussi méthode heuristique ou socratique par référence à l'enseignement dialogué de l'illustre philosophe. Un problème se pose ; un dialogue s'établit entre le professeur et ses élèves ; par ce dialogue, la solution du problème s'ébauche, se fortifie, se purifie et acquiert une fermeté suffisante pour conduire à une conclusion valable. Cette conclusion, fruit d'un travail collectif, mérite souvent d'être solennisée et élevée à la dignité de théorème. Les théorèmes acquis suggèrent de nouveaux problèmes, ouvrant la voie à de fructueuses explorations.

Le terrain d'exploration.

Il est dessiné pour chaque classe par notre programme. On peut certes souhaiter des aménagements ou des embellissements à ce programme, certains le voudraient plus riche, d'autres plus léger ; mais quelles que soient nos préférences, notre premier devoir est de le respecter, tel qu'il est. Nous décidons en conséquence de traiter le programme et rien que le programme. Mais celui-ci, si précis soit-il, ne nous impose, ni un ordre, ni un langage, ni une méthode. On voit donc quelle merveilleuse liberté, mais aussi quelles responsabilités sont les nôtres.

Le projet.

Ayant pris connaissance du terrain à explorer, le professeur dresse son plan. Il sait qu'il n'est point de voie royale et que de nombreuses difficultés viendront opportunément former le caractère de ses élèves. Il doit cependant tracer un chemin assez sûr pour que les enfants puissent s'y avancer seuls, à la découverte, et assez vivement, car l'impatience des enfants est bonne et le professeur se doit de la satisfaire.

Jalonnements sur la piste.

Les propositions mathématiques jalonnent la piste. Elles ne se nomment pas, de toute éternité, les unes « axiomes », les autres « théorèmes ». C'est le professeur qui, sous sa propre responsabilité, décide de suggérer expérimentalement les unes et de les appeler « axiomes », de démontrer les autres et de les appeler « théorèmes ». Certes, le domaine à explorer est euclidien, car le modèle privilégié de la géométrie euclidienne est « l'espace sensible local », c'est-à-dire l'ensemble des objets physiques familiers aux enfants. Mais, dans le champ même de cette géométrie, les pistes sont nombreuses et les jalonnements variés.

Idées lumineuses.

Lorsque, gravissant un sentier escarpé, le voyageur observe à ses pieds la grande plaine, il voit mille détails indépendants, ici un village, ici une fraction de route, là une tache sombre, au loin une rivière, et chacun de ses détails, ignorant tous les autres, semble mener une existence strictement personnelle. Le voyageur poursuit alors son ascension, il fait quelques pas, il se retourne encore et, brusquement, la grande plaine révèle son secret ; les cours d'eau, les routes, les villes, tous ces objets, accidentels à l'instant précédent, deviennent tout à coup les éléments d'un grand ensemble sobrement structuré. Et c'est cette subite révélation d'une structure que nous appelons une idée lumineuse. Le professeur, avant ses élèves, a reconnu la piste et il sait à l'avance quels seront, au cours de chaque classe, les instants d'illumination.

La classe vivante.

Ainsi vécue, la classe de Mathématiques se déroule comme une aventure. Le professeur déserte la chaire qui reste solennelle au coin de la classe comme le dernier témoin d'un âge révolu. Le professeur est tout près de ses élèves jouant le jeu avec eux. Un élève est au tableau, il y a toujours un élève au tableau, il n'y reste pas très longtemps, car les élèves sont nombreux et les instants sont comptés ; mais pendant quelques minutes, il a l'immense privilège d'être un véritable meneur de jeu.

Parfois même, nous allons plus loin et je dis au meneur de jeu : « Après la découverte, le témoignage ; tournez-vous vers vos petits camarades et faites le cours. » Et, tandis que, fiers des théorèmes conquis et de son premier rôle il parle lentement, fermement, et tous ses condisciples écrivent, sous sa dictée.

Telle est la méthode de redécouverte, méthode hardie et sage ; hardie parce qu'elle attaque joyeusement l'inconnu ; sage car exigeant pour toute assurance l'adhésion préalable de l'enfant, elle respecte avec ferveur la haute règle d'or cartésienne.

CONCLUSION GENERALE

En résumé, nous disposons de deux méthodes : la méthode axiomatique et la méthode de redécouverte.

La première, un peu sévère, nous rappelle la droiture du fondamental et l'exigence d'honnêteté. Soyons francs et ne déguisons pas nos axiomes en théorèmes.

La seconde, la méthode de redécouverte, est active, aimable, vivante ; elle a l'immense avantage de s'adresser à tous les élèves sans exception.

Il y a, entre elles, une apparente opposition ; mais ce n'est qu'une apparence. Résolvons cette contradiction en complémentarité, notre enseignement y gagnera en efficacité et en profondeur.

Y. CROZES.

A PROPOS DE PROBLÈMES : QUE VOULONS-NOUS ?

Il est bien entendu qu'aucun de nos élèves ne ferait de progrès en Mathématiques s'il se contentait d'assister à nos cours, pas plus qu'un spectateur des matches de football du dimanche n'est un véritable sportif et ne sentira ses muscles se développer. Le professeur de Mathématiques fait faire des exercices et des problèmes, le plus régulièrement possible, à ses élèves. Nous en avons fait étant élèves, nous en faisons faire à notre tour, parce que nous en sentons le besoin. Mais savons-nous toujours sortir de la routine, et nous mettre aujourd'hui en face des problèmes d'aujourd'hui ?

Il semble qu'en ce moment, nous pourrions orienter notre action dans un sens légèrement nouveau, sans renoncer le moins du monde à nos deux objectifs traditionnels : exercer les jeunes esprits au raisonnement déductif, ou même à la découverte, les préparer aux examens qu'ils doivent passer, quels que soient nos sentiments intimes sur la « diplomatie » qui sévit en France.

Nous dirons peu de choses des problèmes traditionnels de tout cours de géométrie, ou des exercices de calcul algébrique tendant à faire acquérir des mécanismes ou simplement à entraîner et à exercer la mémoire. Il est des propriétés simples du triangle, des figures formées de cercles, etc... qui ne sont pas « du cours » et que tout maître fait démontrer à titre d'exercices. La recherche des lieux géométriques ou les problèmes de constructions arrivent à passionner les élèves, même moyens,

quand on a le temps de les guider. Peut-être ne savons-nous pas toujours piquer leur curiosité en leur annonçant des résultats qu'on démontrera plus tard. Peut-être ne sommes-nous pas assez ambitieux : à propos de calcul algébrique, des élèves de Quatrième étaient émerveillés par la découverte du triangle arithmétique de Pascal...

S'il y a à revoir à chaque instant notre choix d'exercices et notre façon de les présenter, on ne peut espérer de transformation radicale de nos habitudes en ce domaine.

Il serait tout aussi vain, même pour sacrifier à la mode, de négliger systématiquement les problèmes de B.E.P.C. en Troisième, de Baccalauréat pour les classes terminales. Il faut apprendre à nos élèves à les faire, même si nous ne les trouvons pas aussi éducatifs que nous le voudrions.

Reste un autre aspect de notre tâche, qui prend en 1959 un relief très spécial. Au moment où l'on réclame des connaissances scientifiques dans tous les domaines, où l'on va jusqu'à instituer des cours de Mathématiques dans les Facultés de Droit, nous devons penser constamment à notre tâche essentielle, à notre rôle fondamental : c'est nous qui détenons la clé de la connaissance scientifique.

Ceci comporte une double conséquence : le professeur de Mathématiques ne peut apparaître comme isolé du monde et perdu dans la seule contemplation des êtres qu'il fabrique lui-même ; il doit aussi montrer comment les Mathématiques s'insèrent continuellement dans le réel, sous toutes ses formes, qu'elles sont une discipline dont on ne peut pas se passer. En fonction de cela, il y a des énoncés de problèmes que nous rechercherons, il y a des énoncés que nous fuirons comme la peste, il y a des méthodes et des résultats que nous apprendrons à apprécier ou à critiquer.

Il n'est pas question, ici, de dresser le moindre catalogue des remarques que nous avons pu faire concernant ces trois thèmes. Les exemples ci-après ne peuvent être que fragmentaires et présentés de façon décousue. La classification que nous proposons doit évidemment s'estomper au fur et à mesure que nos élèves avancent en âge, d'autant plus qu'une sélection s'opérera, et que les moins doués pour les splendides abstractions que nous cultivons, seront partis.

Disons donc que les remarques suivantes sont inspirées par le souci de préparer des élèves moyens, en dehors de toute préoccupation d'examens ou de concours, à se développer librement. A ce sujet, les classes de Quatrième, Troisième (et encore !) et Seconde devraient être des classes privilégiées. Le maître y dispose d'une liberté d'esprit plus grande qu'ailleurs, même s'il a le sentiment, en Mathématiques Élémentaires, de marquer davantage les esprits qui lui sont confiés, de former plus particulièrement des disciples.

C'est parce que les vocations — ou les répulsions — se dessinent avant les classes terminales, qu'il faut y apporter une attention particulière.

Avouons de plus que le souci de ne pas laisser apparaître le professeur de Mathématiques comme un professeur mineur en face du professeur principal, qui est toujours le professeur de Lettres, nous pousse personnellement à demander un effort particulier pour que notre discipline apparaisse comme aussi éducative que n'importe quelle autre.

Énoncés à rechercher. — Il faut à la fois se garder du concret à tout prix, et des exemples qui n'apprennent rien. Nos élèves sont, plus qu'on ne l'imagine, passionnés par le progrès technique dont ils sont témoins, par l'évolution des événements autour d'eux pour que d'abondants exemples soient empruntés à notre vie quotidienne.

Il n'est pas concevable, nous semble-t-il, que l'on fasse des exercices sur les puissances sans emprunter des exemples à l'astronomie, à l'électronique, aux satellites artificiels, et ceci dès l'âge de douze ou treize ans.

Ne parlons pas des graphiques que l'on peut tracer en se reportant à tel ou tel aspect de la vie économique ou sociale : il me semble avoir intéressé maintes familles en faisant construire sur une même feuille les courbes représentatives du prix d'un

timbre-poste, d'un litre de lait, les dépenses globales de l'Etat, les traitements de deux catégories de fonctionnaires depuis cinquante ans.

Mais pourquoi ne pas parler du nombre d'or à propos de telle équation du second degré, du pavillon français à l'Exposition de Bruxelles à propos du quadrilatère gauche ? Au lieu de tracer les courbes représentatives de fonctions quelconques, pourquoi ne pas esquisser la synthèse de fonctions périodiques ? Le commentaire de quelques minutes que l'on consacrerait à la question ainsi rencontrée, s'il est perdu pour la Mathématique abstraite, risque d'avoir des conséquences autrement bénéfiques chez nombre de jeunes esprits.

Enoncés à éviter. — Mais, de grâce, que l'on fasse vrai ! Je ne connais rien de plus pitoyable que ces énoncés fabriqués à l'imitation des célèbres problèmes de l'Antiquité grecque : « O ami ! calcule-moi le nombre de bêtes à cornes de Hélios, etc... »

C'est dans un livre imprimé en 1957 que l'on trouve encore l'énoncé suivant : « Un père dit à son fils : Il y a trois ans, j'avais sept fois l'âge que tu avais alors, et dans sept ans j'aurai trois fois l'âge que tu auras toi-même, etc... » Drôle de famille, où le fils ignore l'âge de son père et où de telles conversations s'établissent ! A noter en passant que la presque totalité des problèmes d'âges que j'ai vu poser combinent des nombres entiers d'années, comme si on ne vieillissait pas un peu chaque jour...

Que dire encore une fois des problèmes de robinets, qui ont réussi à dégoûter des fractions et des mathématiques des légions de bons esprits !

Il n'est pas jusqu'aux questions de vocabulaire qui ne revêtent une importance certaine. Continuer à parler d'automobiles, de cyclistes ou de vélocipèdes — nous n'inventons rien — à des enfants qui connaissent mieux que leurs parents les marques de voitures, c'est, tout d'abord, s'exposer fort justement à passer pour un « croulant » — ce qui n'est pas grave à titre personnel — mais surtout c'est laisser soupçonner la matière que nous enseignons d'être empreinte d'un esprit vieillot qui incite nos élèves à chercher d'autres maîtres.

Il suffit parfois de bien peu de choses pour transformer des énoncés de problèmes parfaitement artificiels, donc ridicules, en énoncés présentant les mêmes avantages pédagogiques, mais d'allure plus moderne, donc acceptables.

Exemple : un auteur d'énoncés parle de deux cyclistes qui parcourent à une allure parfaitement régulière une piste (oh ! tableau de marche de Roger Rivière !), tantôt dans le même sens, tantôt en sens contraires : qui a jamais vu ce deuxième cas ? Il est si facile de supposer qu'il s'agit de deux voitures — à qui le moteur imprime des allures régulières — parcourant deux pistes différentes d'un autodrome. Encore faut-il se demander si les mouvements de cyclistes, piétons et voitures ont tant d'importance parmi les problèmes possibles, même de mécanique... * Et, s'ils en ont, pourquoi ne pas prendre les données dans l'Indicateur des Chemins de Fer, où l'on trouve bon nombre de combinaisons.

La critique des résultats. — Il est un autre aspect de notre enseignement, que l'on ose rarement aborder de front, et qui semblerait nécessiter une révision complète de nos habitudes : c'est celui des résultats et de leur discussion.

Il me souvient avoir demandé de calculer le temps que mettrait un projectile pour aller de la Terre à la Lune avec une vitesse supposée constante de 15 km à la seconde. Toutes les réponses, ou presque, étaient calculées au millième de seconde près, en regrettant que « cela ne tombe pas juste ». En classe de Seconde, de Pre-

* Pourquoi ne pas remplacer cyclistes et autos par des planètes ? Calculer la période sidérale de Jupiter après l'observation de deux oppositions successives, puis utiliser la 3^e loi de Képler : voici un bel exercice de calcul permettant de retrouver la distance du Soleil à Jupiter, mesurée en unités astronomiques. (N.D.L.R.).

mière — et je ne parle pas de la Philo — on donne des résultats de calculs trigonométriques avec sept ou huit décimales, la table dont on se sert en comportant quatre.

Là encore, les auteurs d'énoncés sont souvent coupables. Que dire de la collection de stupidités fabriquées pour trouver à tout prix des applications concrètes du P.G.C.D. et du P.P.C.M. ? Ce sont deux montres, dont l'une retarde de 4 mn 30 s par jour pendant que l'autre avance de 7 mn 30 s, et ceci de façon constante pendant des mois et des mois ; c'est — problème de Bourses nationales, s'il vous plaît — un industriel qui fabrique des pains de savon de 7,5 cm sur 5 cm et 2,25 cm (au dixième de millimètre !) et qui les emballe, sans le moindre vide, dans des caisses, etc...

Mais, nous-mêmes, avons-nous toujours le souci, dans des questions empruntées — ou prétendant l'être — à la vie courante, de tenir compte de la précision suffisante des calculs ?

Il y a, c'est sûr, deux objections à prévoir : d'abord, c'est au professeur de Physique à se préoccuper de la précision des mesures, donc des calculs ; ensuite, il faut une grande habitude des calculs exacts pour faire correctement les calculs d'erreurs.

Écartons tout de suite cette deuxième remarque. Il est absolument sûr que la théorie des erreurs ne peut être développée sérieusement qu'en classe de Mathématiques Élémentaires ; aussi bien ne s'agit-il pas de cela, mais simplement d'éveiller le sens critique de nos élèves quand ils manient des nombres.

Et s'il est vrai que notre collègue physicien mettra un terme définitif à l'illusion des résultats exacts dès les premières mesures qu'il fera faire, c'est à nous de mettre en garde les jeunes esprits que nous formons. C'est extrêmement facile. Exemple : le terrain à bâtir ayant une valeur de l'ordre de 100.000 francs le mètre carré dans certains quartiers, il suffit de rechercher de quelle somme on se trompe en ne mesurant qu'à 1 cm près la longueur et la largeur d'un immeuble et de sa cour. Les occasions purement mathématiques ne manquent pas de présenter la différence entre le résultat exact et l'approximation nécessairement utilisée dans la vie courante.

Serait-ce trop difficile ? Certainement pas : une réflexion de simple bon sens suffit à faire admettre que la coïncidence de l'extrémité d'un segment de droite avec celle d'une longueur à mesurer n'a pas plus de chances de se réaliser quand le segment n'est plus l'unité, mais un de ses sous-multiples. Il est également facile de faire comprendre à ce moment que la suite des mesures approchées n'a aucune chance d'être périodique.

Serait-ce peu éducatif ? Bien au contraire. C'est tout le prestige des Mathématiques que nous pouvons asseoir de façon définitive dans les esprits pour peu que nous sachions faire établir la comparaison entre ce que l'esprit humain a bâti dans l'abstrait et ce que les sens de l'homme, aidés des amplificateurs que le progrès leur associe, lui révèlent. Je sais faire tel calcul avec la précision que vous me demandez ; aujourd'hui, vous ne me donnez de mesures qu'au dixième de millimètre ; je ne vous donnerai pas de calculs au micron ; mais si, dans cinq ans, vous savez mesurer mieux, je saurai répondre à vos nouveaux besoins. Je ne verrai jamais, ni une ligne, ni un triangle, ni une sphère ; mais si vous m'en apportez telle ou telle réalisation approchée, je vous donnerai avec une approximation semblable toutes les propriétés que vous voudrez.

Ainsi s'établit clairement la prééminence du raisonnement humain sur les approximations plus ou moins grossières que les sens nous révèlent.

Mais encore faut-il que cette prééminence ne se traduise pas, à tort, par celle de certains hommes sur d'autres. L'harmonie des constructions, des édifices mathématiques, n'entraîne nul mépris pour les autres disciplines, sans même faire allusion aux retentissants échecs de l'esprit humain, qu'il faut signaler à nos élèves au passage (dernier théorème de Fermat, problème de la carte, etc...).

L'orientation que nous donnerons à nos problèmes ne doit pas seulement tendre à déceler les talents mathématiques. Notre idéal n'est pas de rendre les Mathéma-

tiques si éblouissantes que tous veulent devenir mathématiciens : il est de mettre les Mathématiques à leur place, si importante dans la vie moderne.

Et si les réflexions ci-dessus peuvent paraître vagues, que l'on veuille bien les éclairer par la remarque suivante. En dehors de l'aspect traditionnel d'éducation du raisonnement, elles tendent à réhabiliter *le nombre* dans notre Enseignement du Second Degré. Non pas simplement le nombre, parce qu'il est un des sujets d'étude du mathématicien, mais parce qu'il prend une place de plus en plus grande dans la vie moderne.

Donner à nos jeunes gens le sens du nombre, les obliger à penser à propos de problèmes réels de tous ordres, les inciter à « mettre en équations » des phénomènes de toutes sortes, c'est une des tâches qui doit s'offrir à nous. Car nous ne travaillons pas seulement pour la petite élite de futurs mathématiciens, mais pour tous, et à tous nous devons faire comprendre l'importance de notre discipline.

Peut-être même arriverons-nous, par le biais de problèmes bien choisis, à mettre en évidence, pour nos élèves, leurs parents et nos dirigeants, l'indigence de nos programmes et, par ce biais, à obtenir l'augmentation si nécessaire de nos horaires.

Mais ceci est une autre histoire...

C. VIATTE (*Lycée de St-Cloud*).

UTILISATION D'UN FILM DE GÉOMÉTRIE ANIMÉE EN CLASSE DE SECONDE

La présente note n'a pas d'autre intention que de décrire sommairement une classe au cours de laquelle un film de « Géométrie animée », de NICOLET, a été utilisé. Et de solliciter avis et critiques de la part des lecteurs.

Il s'agit d'une classe tout à fait normale de Seconde moderne ; 38 élèves. La notion d'angles orientés et généralisés a été acquise antérieurement à la séance qui fait l'objet de cette note. Aucun élève n'avait vu auparavant de film mathématique.

Avant de projeter le film, il est seulement indiqué aux élèves qu'il durera environ trois minutes : qu'ils auront ensuite à en faire le compte rendu et qu'une attention soutenue est donc désirable ; silence complet.

Voici le film. On sait que Nicolet ne leur a pas donné de titre. Un segment de droite apparaît ; puis deux droites sécantes. Les droites se déplacent, leur angle restant constant, pour venir passer par les extrémités du segment fixe. Après plusieurs déplacements « d'essai », leur point d'intersection décrit le cycle capable de l'angle des deux droites construit sur le segment. Les droites et le segment disparaissent ; puis le cercle.

Les élèves sont alors invités à rédiger un bref compte rendu d'essai. Les résultats sont mauvais ; aucun élève ne pense à l'arc capable, pourtant étudié en Troisième, mais non encore revu cette année. Des observations absurdes sont faites : un élève, qui obtient d'ordinaire de bons résultats, dit : « J'ai vu une homothétie » et provoque un éclat de rire. Tout le monde convient qu'il faut revoir le film.

Après la deuxième présentation, plus des trois-quarts des élèves sont capables de décrire correctement le contenu du film. Certains, dans leur compte rendu, esquissent le plan du film, le découpant en « séquences ». La correction orale des textes permet de formuler le résultat ;

Dans le plan (orienté), on donne deux points fixes et un angle de droites ; (l'ensemble) des intersections des droites passant par les deux points fixes et se coupant selon un angle égal à l'angle donné est le cycle capable de cet angle construit sur les deux points donnés.

Je place deux mots entre parenthèses. C'est lors d'une séance ultérieure que la nécessité de l'orientation a été trouvée par les élèves. Au mot « ensemble », l'expression traditionnelle de « lieu géométrique » a été encore préférée par la plupart des élèves (parce que le mot a été appris dans la classe précédente).

Un élève (généralement médiocre et surtout peu actif dans une classe normale) pose alors une question providentielle : « Ce film ne démontre-t-il pas que l'angle inscrit est égal à la moitié de l'angle au centre qui intercepte le même arc ? » Je sollicite les camarades : rectification quant au fait soi-disant démontré, d'abord ; on parvient, au terme d'une discussion animée (où je prétends, contre mon propre sentiment que le film *démontre*) à la conclusion : les images montrent, elles ne démontrent pas (en passant on peut remarquer qu'il en est de même des *faits* ; mais leur observation attentive précède leur explication). Il faudra donc consacrer une nouvelle classe à la démonstration.

Cependant, de l'avis de tous, une troisième projection du film sera utile... et agréable : l'élève (même peu averti) comprend que, devant ces images animées, il a su se poser correctement le problème du cycle capable.

Remarques du professeur : est-ce l'effet du mouvement qui est le propre du cinéma, très peu d'élèves sont restés passifs. La classe a été très active, très spontanée. Le bienfait de cette stimulation se retrouve dans la classe suivante, celle où l'on démontre, où l'on complète (la construction du cycle considéré, et non de son symétrique, a contraint les élèves à introduire l'orientation). Ultérieurement, je peux constater que l'image animée a aidé les élèves à fixer le résultat dans leur mémoire.

J'insiste : l'observation de l'image animée a motivé, dans ce cas, l'étude rationnelle d'un problème bien posé ; d'autant mieux posé qu'il l'était par les élèves eux-mêmes. Le film pourra être projeté une nouvelle fois, beaucoup plus tard ; ce sera une révision rapide et non ennuyeuse. Mais ces images muettes et mobiles auront eu toute leur puissance suggestive *avant* l'intervention de tout raisonnement.

Je me propose de renouveler l'expérience en partageant la classe en deux groupes : l'un traitera un sujet avec l'aide du film, l'autre sans film ; les résultats seront à comparer.

Je rappelle que les films de « Géométrie animée », de notre collègue NICOLET sont distribués par la Cinémathèque de l'Enseignement Public. La liste complète de ces 22 films a paru dans le *Bulletin* de l'A.P.M. de mars 1958 (n° 191).

G. W.

POUR UN NOUVEAU NUMÉRO SPÉCIAL DES CAHIERS PÉDAGOGIQUES SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

Nous avons publié plusieurs cahiers portant sur l'enseignement des Mathématiques, le plus récent datant de 1955. Ces mises au point périodiques sont nécessaires. Les Mathématiques étant une science vivante et l'enseignement une activité humaine, l'enseignement des Mathématiques pose aujourd'hui des problèmes qui sont seulement en partie ceux d'hier.

Pour traiter ces problèmes, nous faisons appel à tous nos collègues, à tous ceux qui voudront bien nous aider. Nous souhaitons que la présente notice leur suggère des sujets. Aussi n'hésitons-nous pas à la rédiger sans manifester un complexe exagéré de timidité et de modestie.

I. — FORMATION HUMANISTE ET MATHÉMATIQUES

1. Quel est et quel doit être le rôle des Mathématiques dans une formation humaniste ? On demande sur cette question — et sur les suivantes — l'avis de mathématiciens professeurs, celui de mathématiciens non professeurs, celui de professeurs non mathématiciens et celui enfin de non professeurs non mathématiciens.

2. Quelle est et quelle doit être la place des Mathématiques dans l'enseignement des sciences ? Par exemple, faut-il avoir fait beaucoup de Mathématiques pour être en état de commencer la physique, ou aborder l'étude de la physique pour se convaincre de la nécessité des Mathématiques ?

3. Place du point de vue historique dans l'étude des Mathématiques en ce qui concerne, aussi bien la formation des maîtres que les divers niveaux de l'Enseignement du Second Degré. Place également de la méthodologie des Mathématiques.

4. Rôle culturel des Mathématiques appliquées.

II. — DANS LE PREMIER DEGRÉ

1. La formation des premières notions mathématiques ; le nombre et l'espace pour l'enfant de deux à onze ans ; témoignages d'institutrices et d'instituteurs des écoles maternelles et primaires.

2. Programmes et horaires dans le Premier Degré. Techniques de base et formation intelligente. Exemple : les nombres en couleurs. Que valent les programmes de Mathématiques des classes de fin d'études, classes qui sont terminales pour de nombreux élèves ?

III. — DANS LE PREMIER CYCLE SECONDAIRE

A. Horaires et programmes.

1. Les programmes du premier cycle constituent-ils une initiation ou déjà une formation ? Réponse à donner pour l'enseignement court (qui peut être prolongé par passage du Cours complémentaire au Lycée) et pour l'enseignement long (qui d'ailleurs n'est pas tellement long).

2. Comment peut-on renforcer l'enseignement des Mathématiques dans le premier cycle et arriver à l'heure quotidienne (cinq heures par semaine) ?

3. Peut-on distinguer dans chaque classe un programme limité obligatoire et des options (développements de géométrie, d'algèbre, calcul numérique, descriptive, astronomie...) ?

4. Comment développer l'enseignement de l'algèbre (Exemples : introduction des nombres négatifs en Cinquième, du calcul par logarithmes en Quatrième...) ?

5. Quelle géométrie enseigner ? Géométrie intuitive ? Géométrie plane, ou géométrie dans l'espace, ou géométrie dans les plans de l'espace ? Géométrie des ensembles infinis ou géométrie des ensembles finis ? Géométrie et dessin géométrique, place de la descriptive dans l'enseignement d'initiation.

B. Méthodes.

1. Comment guider l'élève de onze-quinze ans dans l'action d'abstraire ? Rôle des séances de travaux pratiques.

2. Comment ménager le cheminement de la pensée enfantine ? La méthode dogmatique, ses avantages, ses inconvénients ; ce que la méthode de « redécouverte » a apporté aux méthodes actives.

3. Dans quelles conditions l'acquisition de mécanismes est-elle possible et souhaitable ? Doit-elle toujours suivre la formation parfaitement claire des notions mises

en jeu ? L'utilisation des connaissances ne révèle-t-elle pas parfois une incompréhension partielle des notions élémentaires ?

4. Dans quelles limites faut-il exiger de la rigueur dès le début des études dans la présentation et le raisonnement ? Quelle part estimez-vous nécessaire de faire à l'intuition (géométrie intuitive, premiers théorèmes acceptés comme des axiomes, introduction rapide des premières notions d'algèbre...) ? Est-il possible d'amener l'élève à souhaiter lui-même une organisation logique de ses connaissances ? L'axiomatisation doit-elle être introduite par étapes. Toute axiomatisation doit-elle être accompagnée d'un apprentissage des techniques d'application ?

5. Les Mathématiques modernes et l'enseignement dans le premier cycle. Evolution du problème depuis ces cinq dernières années. Ce qui est fait, ce qui reste à faire.

6. Apprendre à travailler, devoirs à la maison, Mathématiques et vie de famille.

7. Monographies sur des problèmes pratiques : méthode employée pour la présentation d'un chapitre difficile, utilisation d'un film, travail sur un modèle, sur des graphiques.

8. L'activité scientifique d'un élève du premier cycle en dehors des Mathématiques. Coordination avec les autres enseignements. Cas de l'astronomie.

IV. — LE SECOND CYCLE

1. Programme des classes scientifiques et des classes non-scientifiques. Part à faire, dans les unes et dans les autres, à la formation de l'esprit et à l'utilisation (pour les sciences, les techniques, les sciences humaines et les arts).

2. Aménagement des programmes actuels ou refonte complète ?

3. Place à faire à la géométrie. Faut-il la conserver en raison de sa valeur formatrice, ou la sacrifier à l'algèbre, plus féconde ?

4. Importance de l'algèbre, technique de calcul, fonctions usuelles introduites plus tôt, place du calcul différentiel et intégral.

5. Etapes successives d'axiomatisation ou enseignement continu pendant trois années ?

6. Quelles sont les notions de Mathématiques modernes qui sont à la portée d'élèves de quinze ans, celles qui sont accessibles à des élèves de dix-huit ans ?

7. Mathématiques appliquées : statistiques et probabilités, mécanique, astronomie...

8. Monographies pratiques. Exemple : notions élémentaires sur les ensembles comme introduction générale à un cours de Mathématiques.

9. Activités scientifiques des élèves et travail personnel, littérature scientifique, coordination avec le français, les langues, etc...

10. Horaires du second cycle, organisation des classes terminales.

11. Programme et horaires de Mathématiques dans l'Enseignement Technique.

12. Les examens et les concours. Formule des épreuves de Mathématiques au baccalauréat.

13. Coordination des enseignements. Cas de la physique. Cas de la philosophie (logique).

V. — MOYENS D'ENSEIGNEMENT ET ORGANISATION DU TRAVAIL

1. La classe de Mathématiques, son aménagement matériel dans le premier et dans le second cycle.

2. Le laboratoire d'enseignement pour les professeurs, sa définition, son équipement.

3. Le matériel d'enseignement, les différents matériels possibles, les matériels polyvalents, les modèles faits par les élèves, les liaisons avec le travail manuel (une solution d'avenir : l'établissement du second degré complet avec sections techniques). Le recours au modèle matériel est-il une solution de fortune, applicable pour un certain âge et avec des élèves rebelles à l'abstraction, ou présente-t-il un intérêt pour le mathématicien lui-même, et lequel ?

4. Cahiers, manuels, fiches, livres, journaux, revues.

5. Les films et l'enseignement des Mathématiques.

6. Les musées et l'enseignement des Mathématiques.

VI. — LES PROFESSEURS

1. La pénurie des professeurs en France, dans le monde, ses effets.

2. La formation des maîtres : formation préalable, formation continue.

3. Phénoménologie* du professeur de Mathématiques, difficultés et agréments du métier.

CONCLUSION

Vie et développement de l'enseignement des Mathématiques : intérêt des bilans périodiques ; rendez-vous en 1965.

N.-B. 1. — Nous vous demandons votre collaboration pour le 1^{er} novembre 1959, délai de rigueur. Mais vous nous rendriez un grand service en nous faisant parvenir votre copie au cours des grandes vacances, par exemple pour le 1^{er} septembre.

Prière d'adresser les articles :

— soit à G. Walusinski, 26, parc de la Bérengère, Saint-Cloud (Seine-et-Oise) ;

— soit à F. Goblot, 7, rue Jean-Marie-Duclos, Lyon, 5^e.

N.-B. 2. — OBSERVATIONS GÉNÉRALES :

1^o Les circonstances peuvent nous obliger à modifier en cours d'année le calendrier prévu.

2^o La date limite pour l'envoi d'un article est fixée à deux mois et demi avant la date de parution du cahier où il doit être inséré.

3^o Nous prions instamment nos collègues de nous indiquer, dès qu'ils sont en mesure de le faire, leur intention de nous apporter leur concours et le ou les sujets auxquels ils songent.

4^o Dans nos congrès, certains des cahiers en préparation pour 1959-60 ont donné lieu à des débats. Mais l'enregistrement a parfois été déficient. Il ne vaut jamais, d'autre part, un texte composé et rédigé. Nous sollicitons donc aussi la collaboration écrite des collègues ayant participé aux travaux d'une commission.

5^o Une contribution à l'un de nos *Cahiers* peut prendre l'une ou l'autre des formes suivantes : a) Un article dans lequel les divers aspects d'une question sont envisagés tour à tour ; un article de ce genre peut compter au moins un millier de mots environ et beaucoup plus si besoin est ; le même collaborateur peut écrire plusieurs articles destinés au même cahier. b) Une ou plusieurs notes d'une à quatre pages exposant chacune un élément (opinion, fait, exemple...) à verser au dossier d'une étude plus complète faite par la rédaction à l'aide d'un nombre suffisant de notes analogues.

— Quand nous recevons plusieurs articles sur le même sujet, nous sommes parfois obligés, pour éviter des répétitions, de les considérer comme un ensemble de notes.

— Si articles et notes sont pour nous également précieux, par contre les « réponses au questionnaire », exprimant en quelques lignes un avis rapide sur les diverses rubriques de notre notice, n'ont pas pour nous beaucoup d'utilité.

6^o Les articles peuvent nous être envoyés manuscrits ; s'ils sont dactylographiés, prière de les taper avec une marge suffisante et le double interligne.

* « Etude descriptive d'un ensemble de phénomènes tels qu'ils se manifestent dans le temps et dans l'espace... » (A. LALANDE, *Vocabulaire*). Nous avons besoin d'un terme philosophique. En prenant celui-là, nous n'entendons nullement suggérer que les professeurs de Mathématiques soient des phénomènes, au sens vulgaire du mot : comme le philosophe, le mathématicien ignore la vulgarité.

« LE COIN DU VIEUX MANIAQUE »

Quelqu'un proposa, à la dernière Assemblée générale, de partir ensemble à la recherche, dans les anciennes collections du bulletin, des bonnes remarques et recettes pédagogiques qui y foisonnent.

Je proposais alors d'appeler cette rubrique : « le coin du vieux maniaque ». Une aussi innocente remarque suffit pour qu'elle me fût attribuée. Notre président m'ayant depuis rappelé à mon devoir, me voici entouré de nos vieux numéros. J'ai du mal à m'arracher à leur lecture pour vous présenter quelques-unes de mes glanes. Ce n'est pas non plus sans émotion que je revois surgir tant d'amis, vivants encore ou disparus comme ce délicieux Elie Weill, mort en déportation, animé jusqu'au bout du simple et beau courage du bon ouvrier.

Excusez je vous prie le désordre dans lequel je présente les quelques extraits qui suivent. Lorsque j'aurai retrouvé plus de calme, je ferai peut-être un peu mieux.

Du n° 35, page 136, rapport du Jury d'Agrégation, concours de 1923 :

« En ce qui concerne les modes de démonstration, il y aurait lieu... de mettre en évidence l'idée principale. Par exemple, lorsque le professeur cherche à établir la limite de

$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$, ne doit-il pas avant tout faire remarquer que si m est très grand, les termes

du développement sont voisins des termes correspondants de la série e ? Ou, de peur que l'élève ne se contente d'une idée si naturelle, doit-il, au contraire, masquer ce fait essentiel par une foule de détails entièrement secondaires et que l'élève se croit obligé d'apprendre par cœur ?

« A l'heure actuelle, beaucoup d'hommes faits se trouvent amenés, chacun dans sa profession, à s'apercevoir de l'utilité des mathématiques dans des régions du savoir et de la recherche qui en paraissent très éloignées. Ils ne peuvent comprendre pourquoi leurs anciens professeurs leur ont présenté sous une forme mystérieuse et inaccessible aux profanes une science qui leur paraît maintenant — et avec raison — relever du simple bon sens. Il faut souhaiter que les jeunes professeurs ne se soucient pas moins de faire comprendre que de démontrer, — ce qui n'est pas du tout la même chose. »

M. FRECHET, correcteur de la composition de mécanique,
cité par l'Inspecteur général E. BLUTEL,
Président du Jury.

Du n° 57, p. 33, et suivantes, extraits d'une Conférence faite le 25 avril 1928, par l'Inspecteur général Blutel, à la Société Mathématique de France :

« Le triangle isocèle, inoffensif d'apparence, se présente en réalité comme une source de difficultés. Le découpage, le retournement et le transport sur le triangle primitif, en vue de constater l'égalité des angles opposés aux côtés égaux, n'échappe à l'accusation d'arbitraire que si l'on utilise la connaissance du but ; la marche suivie est celle d'une démonstration, non d'une découverte : la conséquence ne se fait guère attendre.

« Je vous surprendrai sans doute en vous disant la peine que j'éprouve à faire réaliser un triangle isocèle, dans certaines classes de Quatrième ; les maîtres en sont scandalisés et se croient obligés de mettre un baume sur l'amour-propre de leurs élèves en disant que ceux-ci cherchent toujours la difficulté.

« La confusion de la définition et des propriétés d'une figure est chose presque normale chez les débutants ; c'est, sous une forme à peine différente, celle des hypothèses et des conclusions. Aussi n'est-il pas rare d'entendre les élèves définir un triangle isocèle par l'égalité des deux angles. Chaque fois que j'ai constaté le fait, j'ai demandé de construire un triangle qui ait deux angles égaux, sans utiliser la connaissance du triangle isocèle : les élèves n'ont jamais pu répondre que par une affirmation à l'objection relative à l'intersection des demi-droites qu'ils sont amenés à tracer. On peut se demander, à ce propos, si le numérotage imposé aux cas d'égalité des triangles est bien conforme à la simplicité et à la logique. »

Du n° 48, décembre 1926, p. 64, « Sur la définition d'un angle polyèdre convexe » :

« M. Lebesgue a montré l'importance du chapitre du cinquième livre consacré aux angles polyèdres (1). Le sujet se rattache étroitement à des questions de géométrie de

(1) H. LEBESGUE : Sur les angles polyèdres. « Revue de l'Enseignement des Sciences », février 1916.

situation et, « comme il ne dépend pas du professeur qu'un sujet soit lié ou non à des questions délicates, on n'arrive à une exposition simple qu'en éludant les difficultés et non en les résolvant ». A cause de cela, M. Lebesgue réduirait volontiers pour les débutants le chapitre des angles polyèdres à l'étude des deux orientations de l'espace qui est « chose importante, capitale ».

Néanmoins, le programme nécessite l'étude de relations métriques concernant les angles polyèdres convexes. On définit souvent un angle polyèdre convexe comme un angle polyèdre dont toutes les arêtes sont d'un même côté par rapport au plan de chaque face. Il faut alors démontrer qu'il existe des plans qui rencontrent les arêtes d'un angle polyèdre convexe aux sommets d'un polygone convexe. Pour la plupart des élèves de Première, il est préférable de faire admettre cette proposition sans en exiger la démonstration. On évite cette difficulté en donnant la définition qui suit, équivalente à la définition qui vient d'être rappelée :

« Un angle polyèdre convexe est un angle polyèdre dont les arêtes peuvent être obtenues en menant les demi-droites dirigées de son sommet S vers les sommets d'un polygone convexe dont le plan ne passe pas par le point S.

E. WEILL,
Professeur au Lycée St-Louis.

Du n° 44, février 1926, page 67. Compte rendu par M. Commissaire, de la première session ordinaire du Conseil supérieur, pour l'année 1926.

« Programmes des classes élémentaires. — Les idées qui avaient conduit à proposer la suppression du professorat devaient motiver une demande d'unification des programmes des classes élémentaires et des écoles primaires. L'exposé des motifs qui accompagnait le projet relatif à cette unification insistait sur l'intérêt social considérable et évident qu'il y aurait à recevoir dans les lycées, les élèves sortant de l'enseignement primaire.

« Mais à vouloir aller aussi loin dans cette voie ne risque-t-on pas de dépasser le but et d'obtenir des résultats regrettables ? S'il importe d'attirer dans nos lycées l'élite des élèves de l'enseignement primaire, élite formée d'enfants qui, avec le régime actuel, passent facilement du cours supérieur des écoles primaires dans la classe de Sixième, il faut laisser ceux qui sont seulement de bons esprits, l'école primaire supérieure en tirera les cadres indispensables à l'armée du travail. Les pousser vers l'enseignement secondaire ne servirait qu'à en faire des aigris, des déclassés, des ratés.

« Introduire dans les classes élémentaires des lycées et collèges les programmes des écoles primaires est peut-être plus simple que d'effectuer l'opération inverse, mais présente pour l'enseignement secondaire des inconvénients certains. D'une part l'abaissement du niveau de l'enseignement du français en Septième, d'autre part ce sera pour l'enseignement scientifique l'origine de graves difficultés. Le représentant des agrégés de mathématiques a insisté sur cet aspect trop peu connu de la question. La plupart des enfants des écoles primaires cessent leurs études à 13 ans et sont destinés à constituer la masse des ouvriers et des agriculteurs, on veut leur donner certaines notions pratiques. Pour leur en faire comprendre le sens, l'instituteur est obligé à des comparaisons, à des vérifications, car il lui est impossible de faire vraiment appel au raisonnement. L'élève moyen formé à cette discipline se contente bien volontiers de ces vérifications, il devient très difficile ensuite de lui faire comprendre la nécessité d'une véritable démonstration. Seuls d'excellents esprits sont capables de se dégager de cette emprise et, après avoir subi cette véritable déformation, peuvent faire de bonnes et profitables études secondaires. Plus le passage de l'enseignement primaire à l'enseignement secondaire est tardif, plus il devient difficile de donner à l'élève de bonnes habitudes d'esprit. Des exemples caractéristiques sont cités à l'appui de cette thèse. Là se trouve pour les sciences la différence essentielle entre la culture secondaire et l'éducation primaire.

« Le Conseil, estimant sans doute moins dangereuse la réforme relative aux programmes que celle qui intéresse la préparation des maîtres, a adopté le projet. »

Le vieux maniaque a reproduit scrupuleusement les textes. Son choix est cependant aussi arbitraire que tout autre. Puisse-t-il réveiller quelques colères, venant des diverses écoles pédagogiques, qui, par l'animation qu'elles donneraient au bulletin, et le manque de place qui en résulterait, lui permettraient de se reposer quelque temps.

Jean ITARD.

Graphes, jeux, problèmes.

C. BERGÉ : **Théorie des Graphes et ses applications**. Dunod, 288 pages, relié, 3 400 F, Paris, 1958.

Les amateurs de récréations mathématiques qui ont lu et relu les classiques tels que Lucas et Rouse-Ball retrouveront ici bien des questions qui leur sont familières : problème des demoiselles, triades, problèmes d'Euler (les 36 officiers, les ponts de Koenigsberg), problème des huit reines, et bien d'autres encore.

Il y a longtemps déjà que les récréations mathématiques qui relèvent de la « géométrie de situation » sont admises dans les Mathématiques « sérieuses ». Dans l'austère Mémorial des Sciences mathématiques, Sainte-Laguë, qui s'était passionné pour ce genre de problèmes, a publié en 1926 un fascicule sur les « Réseaux ou Graphes » (1), puis un second en 1929 sur la « Géométrie de situation et Jeux ».

Sainte-Laguë déplorait alors que, « malgré les recherches déjà importantes faites en géométrie de situation, cette science ne forme pas encore un corps de doctrine très cohérent, et les matériaux qui la composent sont un peu disparates », et il augurait que ses principales applications se trouveraient en chimie.

C'était une prédiction trop prudente ; en fait, les graphes se trouvent partout, chaque fois que, pour aider le raisonnement, on représente un élément d'un ensemble par un point, et une relation entre deux éléments par un arc joignant les deux points représentatifs, qu'il s'agisse de relation de parenté (arbres généalogiques), de connexions dans un réseau électrique, de diagrammes d'organisation en économétrie.

Une telle théorie, dont les applications sont si variées et mettent en jeu des idées si diverses, ne peut, si on la met sous forme mathématique, s'aider que de fort peu d'outils ; elle doit presque se réduire au raisonnement à l'état pur. C'est ce que savent bien les amateurs de récréations ; ils se trouvent souvent plus désarmés encore qu'en arithmétique, qui nous réserve pourtant encore maints secrets.

D'une manière générale, on peut dire qu'on a un graphe chaque fois qu'on a un ensemble E et une application Γ de E dans E , et qu'on représente les éléments x , et $y \in \Gamma x$ par un arc (muni ou non d'une flèche) continu, allant du point x au point y .

A partir de cette définition, la théorie se développe sans guère utiliser d'autres théories que celles des ensembles et de l'algèbre linéaire. Aussi n'est-on pas surpris de rencontrer à maintes reprises des problèmes qui peuvent se résoudre par les méthodes des « programmes linéaires », notamment par la méthode du « simplexe » de Dantzig. C'est le cas, par exemple, pour la détermination du nombre chromatique d'un graphe (2) qui, analytiquement, se ramène à un programme linéaire, avec cette complication que la solution doit être formée de nombres entiers.

En réalité, cette comparaison entre deux méthodes se termine à l'avantage des graphes. Ils ont leurs algorithmes propres dont l'efficacité est telle qu'il est souvent avantageux de les appliquer aux problèmes linéaires. Il en est ainsi pour les problèmes relatifs aux réseaux de transport (trafic routier, maritime), que l'auteur étudie

(1) On voit que Sainte-Laguë employait déjà le terme « graphe », bien qu'il ait été adopté surtout depuis les travaux de D. König (*Theorie der Endlichen und Unendlichen Graphen*, 1950).

(2) On dit qu'un graphe est p -chromatique s'il est possible de colorier les sommets avec p couleurs distinctes, de sorte que deux sommets adjacents ne soient pas de la même couleur. Le nombre chromatique d'un graphe est la plus petite valeur de p pour ce graphe.

en détail. Il cite l'exemple d'un problème qui se représente par un graphe de 500 sommets et 4 000 arcs et peut être résolu « à la main », alors que les méthodes des programmes linéaires n'en viendraient à bout que péniblement.

L'algèbre elle-même trouve dans les graphes un auxiliaire efficace. Poincaré avait déjà utilisé la notion de matrice dans ses travaux d'« Analysis Situs » ; nous retrouvons ici la notion de matrice d'incidence, et incidemment nous trouvons une élégante démonstration d'un théorème de Birkhoff-von Neumann, selon lequel toute matrice bistochastique est un barycentre de matrices de permutations (3).

L'utilisation des graphes dans la théorie des jeux est aussi traitée, notamment dans le chapitre 6, où sont résolus complètement les jeux de Nim, et démontré, sous sa forme la plus générale, le célèbre théorème de Zermelo-von Neumann sur l'existence d'un équilibre (4).

Dans une note finale sont étudiés les problèmes de transport (affectation optimale du personnel, dépôts et distribution de marchandises). Le plus ancien exemple de problème de ce type a été posé en 1781 par Monge, à propos de déblai et de remblai. Le problème de Monge a été souvent repris depuis (notamment par Appell dans le n° 27 du *Mémorial des Sciences mathématiques*) sous sa forme géométrique, et ce n'est que récemment qu'on lui a attribué toute son importance dans la recherche opérationnelle.

Les problèmes de transport sont encore des exemples de programme linéaire ; mais, ici encore, la théorie des graphes a fourni un algorithme approprié, la « méthode hongroise », que les techniciens de la recherche opérationnelle s'accordent pour estimer beaucoup plus efficace que la méthode du simplexe.

Le but de l'auteur était de donner un outil mathématique s'appliquant aussi bien aux sciences du comportement, à la théorie de l'information, à la cybernétique, aux réseaux de transport qu'à la théorie des ensembles et aux matrices. Il y a parfaitement réussi.

Certes, la lecture de l'ouvrage n'est pas facile et l'hétérogénéité (inélucltable) signalée par Sainte-Laguë existe encore. Il y a, comme dit l'auteur, des théorèmes « mous » que chacun utilise presque sans le savoir, et des théorèmes « durs » dont la démonstration est fort subtile. Il ne saurait en être autrement en une matière où le raisonnement se présente sans armes, ou presque.

On ne s'étonne donc pas de trouver en appendice une liste de questions non résolues, parmi lesquelles naturellement le célèbre théorème des quatre couleurs, et les triades, qui ne se rencontrent pas seulement dans le problème des demoiselles en promenade, mais aussi en statistique dans les plans d'expérience.

Les professeurs de Mathématiques liront, je crois, avec passion ce livre si sobre de techniques, où ils retrouveront la plupart des problèmes qui se posent dans la pratique des affaires et qu'on arrive maintenant à traiter mathématiquement.

En dehors d'une confirmation éclatante du fait que les récréations mathématiques ne sont pas choses futiles, ils y trouveront quantité de problèmes essentiellement concrets qui, dûment simplifiés, pourraient sans doute fournir d'intéressants exercices.

A. H.

(3) Une matrice bi-stochastique est une matrice carrée (a_{ij}) telle que :

$$a_{ij} \geq 0 \quad , \quad \sum_i a_{ij} = 1, \quad \sum_j a_{ij} = 1.$$

(4) Ce théorème a été entrevu par Lucas en 1896 (*Récréations mathématiques*) et démontré en 1912 par Zermelo, en ce qui concerne le jeu des échecs.

L'Enseignement des Sciences.

Nombreux sont les Collègues qui ont connu et apprécié l'ancienne revue *L'Enseignement Scientifique*, qui a paru de 1927 à 1940. Pendant ces treize années elle a œuvré pour le développement des études scientifiques, — en réaction contre les réformes Bérard —, et pour l'amélioration des programmes et des méthodes.

L'Enseignement Scientifique avait eu un ancêtre : *La Revue de l'enseignement des sciences*, née en 1907 et probablement disparue en 1917.

En 1959, alors que des « mouvements », des « organismes » divers prolifèrent pour travailler au développement de la recherche ou de l'enseignement scientifique, alors que toutes les sciences, mathématiques, physiques, biologiques ou géologiques connaissent un progrès rapide (tant du point de vue théorique que du point de vue des applications), la création d'une revue d'action et de culture qui s'intitulera *L'Enseignement des Sciences*, nous a paru possible et nécessaire.

Des contacts ont été pris entre scientifiques de la recherche et de l'enseignement, entre professeurs de tous les degrés d'enseignement (Premier Degré, Second Degré, Technique et Supérieur) et de toutes les disciplines (mathématiques pures et appliquées, physique, chimie, biologie, géologie). Les responsables des trois associations : Union des Physiciens, Union des Naturalistes, A.P.M., ont été consultés et rien n'a été fait sans leur accord (il ne s'agit pas de concurrencer les associations de spécialistes, mais d'aider à leur développement). L'accord général s'est fait sur les bases suivantes : revue de culture servant à la formation continue des maîtres, revue d'action pour la rénovation des méthodes et, plus généralement, des études scientifiques.

Une culture scientifique véritable exclut l'excessive spécialisation. D'autre part, l'action de rénovation des méthodes dans une discipline déterminée ne peut être efficace et équilibrée sans coordination avec ce qui se fait dans les disciplines voisines. Il y a donc nécessité d'ouvrir la revue à tous les problèmes de l'enseignement de toutes les sciences.

Autre nécessité : envisager les problèmes à tous les niveaux de l'enseignement et condamner *a priori* ce genre de récriminations trop fréquentes des maîtres de tel niveau d'enseignement contre « les autres ». Il faut que les collaborateurs de la nouvelle revue proviennent de tous les « horizons pédagogiques ».

Il serait fâcheux de limiter notre enquête, notre recherche et même notre action à la France seule. Nous l'étendrons à tous les pays et nous avons le grand plaisir de compter, dès les premiers numéros, des contributions essentielles venant d'amis belges, espagnols et italiens (ces derniers écrivant d'ailleurs directement en français).

Il restait à préciser la « formule » de la revue, son titre, son ton. Il restait à constituer un comité de rédaction. Il restait enfin à trouver un éditeur. Ces préparatifs ont demandé du temps. Nous avons eu la joie d'aboutir et nous espérons avoir présenté le n° 1 de *L'Enseignement des Sciences* à nos Collègues, quand ce *Bulletin* paraîtra.

En donnant le sommaire du n° 1, nous pourrions préciser la « formule » de la revue : en tête, Paul Couderc : « Aux confins de l'Univers connu », traite le problème de la détermination des distances extra-galactiques ; c'est l'article de culture générale scientifique ; « lisible en écoutant la radio », m'a dit l'auteur, et c'est vrai ; digne d'une lecture attentive sans bruit de fond, ajouterai-je.

Après la tête, le corps ; rubrique double que l'on pourrait intituler « Idées et réalisations » (tout comme dans un corps où il y a un cœur et un ventre). André Revuz demande si l'enseignement des sciences ne doit pas être principalement considéré comme une éducation de la liberté de l'esprit. Bertrand Schwartz explique quelle a été la réforme des études à l'Ecole des Mines de Nancy, dont il est directeur.

Après la tête et le corps, *les pattes* ; elles sont au nombre de quatre et d'inégales longueurs (pour augmenter l'agilité de la revue). La première traite de problèmes pédagogiques : G. Choquet, Les Mathématiques modernes et l'enseignement ; U. Fillippi. A la suite de Jean Perrin ; Louis Jéronnez, Qu'est-ce que la géométrie intuitive ? ; Ch. Rollin, la physique des enfants. Seconde patte, l'enquête en cours : ici, sur la réforme des licences scientifiques (par P.-Y. Gal) ; 3^e patte, la bibliographie ; 4^e patte, la correspondance. Une page d'échos, des dessins, et un éditorial complètent ce premier numéro de 52 pages.

La revue paraîtra cinq fois par an. Le n° 2 paraîtra fin juin, le n° 3 le 15 octobre. Ils contiendront : une importante étude de notre ami Puig-Adam sur la logique, de Mlle Castelnovo sur la géométrie intuitive, de M. Kourganoff sur la situation du chercheur scientifique, etc...

Le ton de la revue est celui de la libre discussion. L'indépendance est assurée, tant vis-à-vis de l'administration que de toute tendance particulière, et la tâche des rédacteurs est surtout de maintenir l'esprit de coopération qui a présidé à la fondation de la revue et qui est la condition de son succès.

Les personnalités suivantes ont accordé leur patronage à la revue : M. Joseph Pérès, Doyen de la Faculté des Sciences de Paris ; M. Basquin, Directeur de l'Ecole Normale Supérieure de l'Enseignement Technique ; M. Campedelli, professeur à l'Université de Florence ; M. H. Cartan, professeur à la Sorbonne ; Mlle E. Castelnovo, professeur à Rome ; Mlle Chenot, sous-directrice de l'Ecole Normale Supérieure de jeunes filles ; M. Paul Couderc, astronome titulaire de l'Observatoire de Paris ; M. Dechène, inspecteur général de l'Instruction Publique ; M. Desforge, inspecteur général de l'Instruction Publique ; M. H. Freudenthal, professeur à l'Université d'Utrecht ; M. Jéronnez, Préfet de l'Athénée Royal de Binche (Belgique) ; M. Kirmann, sous-directeur de l'Ecole Normale Supérieure ; M. A. Lichnerowicz, professeur au Collège de France ; M. Pescarini, professeur au Lycée Dante à Ravenne (Italie) ; M. P. Puig-Adam, membre de l'Académie des Sciences d'Espagne, professeur à l'Ecole des Ingénieurs industriels de Madrid ; M. P. Robert, inspecteur général honoraire de l'Instruction Publique ; M. W. Servais, Préfet de l'Athénée du Centre (Morlanwelz, Belgique) ; M. B. Trouvelot, directeur de la Station centrale zoologique agricole ; M. Ulrich, directeur de l'Ecole Normale Supérieure de Saint-Cloud ; M. Maurice Weber, professeur honoraire de Mathématiques Spéciales.

Le Comité de rédaction est constitué par : M. Angéli, professeur à l'Ecole Supérieure d'Optique ; M. Bellemer, chef de travaux de botanique à l'Ecole Normale Supérieure de Saint-Cloud ; M. A. Biguenet, professeur à l'Ecole Nationale Supérieure de Céramique ; M. Chazal, professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée Charlemagne ; M. G. Choquet, professeur à la Sorbonne ; M. Cluzel, professeur à l'Ecole Normale Nationale d'Apprentissage ; M. Crozes, professeur au Lycée Henri-IV ; M. Daumas, Conservateur adjoint du Musée des Arts et Métiers ; M. C. Delapierre, professeur à l'Ecole Militaire préparatoire des Andelys (Eure) ; M. J. Dixmier, professeur à la Sorbonne ; M. Eurin, professeur au Lycée Charlemagne, Président de l'Union des Physiciens ; Mlle L. Félix, professeur au Lycée La Fontaine ; M. P.-Y. Gal, Elève à l'Ecole Normale Supérieure ; M. R. Guilloré, professeur de Cours Complémentaire à Paris ; M. G. Guinier, professeur au Lycée Janson-de-Sailly ; M. A. Huisman, professeur au Lycée Montaigne, Président de l'Association des Professeurs de Mathématiques ; M. Oria, professeur au Lycée Hoche, Président de l'Union des Naturalistes ; M. J.-C. Pecker, astronome de l'Observatoire de Paris ; M. Roch, chef de travaux de physique de l'Ecole Normale Supérieure de Saint-Cloud ; M. Raffin, professeur au Lycée Voltaire, Docteur en Médecine ; M. A. Revuz, professeur à la Faculté des Sciences de Poitiers ; M. L. Schwartz, professeur à la Sorbonne ; M. R. Ségué, professeur de Cours Complémentaire à Paris ; M. Viovy, chef de travaux de chimie à l'Ecole Normale Supérieure de St-Cloud.

Nous assurons tous deux Itard, les tâches du secrétariat de rédaction. Nous souhaitons recevoir avis, critiques et suggestions de tous nos Collègues.

Enfin, nous avons eu la grande satisfaction de trouver un éditeur dont l'éloge n'est plus à faire quand on sait quels ouvrages scientifiques il a à son actif : Hermann (115, boulevard St-Germain, Paris, 6^e). Nous devons cependant insister un peu sur l'importance qu'il a bien voulu accorder à notre projet. La qualité de la présentation de la revue est un des atouts en faveur de son succès.

Celui-ci sera durable, — c'est évidemment ce que nous espérons —, si nous obtenons le concours de tous les professeurs et en général de toutes les personnes intéressées par un enseignement des sciences qui soit au service de la science et au service de l'homme.

G. WALUSINSKI.

N.-B. — 1. Dans le cas où vous n'auriez pas reçu le n° 1 de *L'Enseignement des Sciences*, écrivez au signataire de l'article qui vous le fera adresser aussitôt.

2. Abonnement : 1 200 F par an. C.C.P. Hermann, Paris, 10 190 32.

Parmi les revues allemandes et néerlandaises.

La décision prise par le Comité de rédaction d'alimenter la rubrique bibliographique du *Bulletin* coïncide avec la publication du premier numéro d'une revue de langue allemande, *Praxis der Mathematik*, consacrée aux questions d'enseignement des Mathématiques pures et appliquées. Cette revue mensuelle, dirigée par le Dr. Georg Wolff (Düsseldorf), éditée à Cologne, contient des études, des énoncés et solutions, des informations, et une revue des publications (le n° 198 de notre *Bulletin* est mentionné et brièvement analysé). Souhaitons une vie prospère à cette nouvelle venue qui, retournant la formule platonicienne, adopte une devise qu'aucun de nous ne désavouera : *Que nul ne quitte l'école sans une sérieuse formation mathématique*. Voici une analyse de ce numéro inaugural.

PRAXIS DER MATHEMATIK, 1^{re} année, n° 1, avril 1959, p. 1 à 28.

B. SCHOENEBERG, *Comment traiter la théorie des nombres dans le cycle terminal* (1). Sans se faire l'avocat d'un enseignement axiomatique, l'auteur signale les nombreuses occasions qu'offre l'arithmétique d'élargir l'horizon des élèves. L'exemple de l'anneau des entiers pairs, où l'unicité de la décomposition en produit de facteurs « premiers » disparaît, est intéressant.

F. REUTTER, *Affinité et projection centrale en géométrie descriptive*. Introduction des correspondances planes au moyen des correspondances d'un plan à l'autre dans l'espace.

S. PAASCHE, *Sur la relation réciproque des fonctions exponentielle et logarithmique*. Analogies formelles entre les équations différentielles, les théorèmes de limite, les développements relatifs aux deux fonctions.

W. BÖHME, *Fonction d'amortissement et fonction de saturation*. Exemples d'emploi de la fonction exponentielle.

(1) La correspondance avec l'enseignement français est difficile à établir. Cette *Oberstufe*, dont il est question ici, intéresse les élèves de 16 à 19 ans (N.d.T.).

L. et W. PETER, *Nomogramme pour la réduction des volumes gazeux*. Construction d'abaques logarithmiques à points alignés pour la réduction aux « conditions normales » du volume ou de la masse volumique des gaz parfaits.

D'autre part, des indications sur l'enseignement des Mathématiques en Norvège sont données par KAY PIENE (Oslo) ; nous les résumons par ailleurs.

EUCLIDES. 34^e année, VII, avril 1959, p. 193 à 224. Signalons dans cette revue mensuelle, publiée à Groningen (Pays-Bas), l'article de P. G. J. VREDENDUIN, *Sur l'emploi de « OU » et « ET » dans la résolution des inéquations*. Analyse intéressante d'une difficulté de vocabulaire (qui n'est pas particulière au néerlandais, hélas !) ; les deux conjonctions, dans l'usage courant, ne sont pas rigoureusement équivalentes aux deux opérations logiques de réunion et d'intersection, d'où un certain flottement dans l'expression. La question reste ouverte.

J.-M. Ch.

Ouvrages récents (en allemand) :

HILBERT et ACKERMANN, *Grundzüge der theoretischen Logik*, Berlin, 1959 ; VIII, 188 p., 33 DM.

Traité de logique mathématique. Au sommaire : Calcul des propositions, — Calcul des classes, — Calcul des prédicats restreint, — Calcul des prédicats généralisé. Exercices sur chaque chapitre.

LIETZMANN, *Experimentelle Geometrie*, Stuttgart, 1959 ; III p., 132 fig., 12,6 DM.

Emploi des procédés intuitifs (instruments de dessin, découpages, pliage, fils, mécanismes simples).

L'enseignement mathématique en Norvège *.

1^o Ecole primaire de sept ans.

2^o Tronc commun de la *realskole* et du *gymnas* (deux ans, cinq heures hebdomadaires), — Géométrie plane avec démonstrations, exercices de construction et de calcul, — Arithmétique : règles fondamentales du calcul rationnel, numérique et littéral ; équation du premier degré. L'intelligence du symbolisme prime le souci des démonstrations.

Ensuite bifurcation :

3^o A. Troisième et dernière année de la *realskole* (4 heures). Arithmétique appliquée à l'économie.

3^o B. *Gymnas* à plusieurs sections :

a) Section langues (4 heures en 3^e année, 5 heures en 4^e année, rien en 5^e année). Continuation de la géométrie plane, fonctions simples, équation du second degré, graphiques, arithmétique économique.

b) Section scientifique ou *reallinje* (6 heures en 3^e année, 5 heures en 4^e année, 7 heures en 5^e année ; de surcroît 0 + 1 + 1 h de géométrie descriptive). Algèbre,

* Cette note est rédigée d'après les indications données par RAY PIENE (Oslo), dans le n^o 1 de la revue *Praxis der Mathematik*, dont il est rendu compte par ailleurs.

calcul différentiel et intégral, trigonométrie, géométrie (plan et espace), géométrie analytique.

c) Sciences de la nature ou *naturfaglinje* ($4h + 5h + 5h$). Pas de géométrie dans l'espace ; niveau un peu inférieur à la section précédente.

Commentaire de l'auteur : Les Mathématiques jouissent d'une position relativement bonne dans l'enseignement. On peut se demander s'il existe une relation raisonnable entre les efforts et les acquisitions dans la section langues et si, par exemple, on ne devrait pas pouvoir y opter pour l'arithmétique économique seule.

Suit, à titre d'illustration, le sujet donné en 1958 à l'examen de Maturität. Ce sujet, commun à toutes les écoles, est destiné aux candidats de la section scientifique (reallinje) ; durée de l'épreuve : 5 heures.

1. a) Qu'entend-on par progression géométrique ? Dans la suite $a_1, a_2, \dots, a_n$, chaque nombre est supérieur de 10 % au précédent. Montrer que la suite est une progression géométrique et exprimer a_n au moyen de a_1 et n .

b) Dans une famille, les parents souhaitent assurer l'éducation de leurs enfants en plaçant à la banque une certaine somme. Cette somme doit être telle que, pendant 15 ans, on puisse retirer annuellement 2 000 couronnes. Quel doit être son montant si le premier retrait doit advenir un an après le placement et les autres retraits à un an d'intervalle. Taux annuel 3 %. Ecrire la suite employée.

Les parents arrondissent la somme et placent 24 000 couronnes. Mais ils adoptent un autre mode de retrait qu'ils estiment préférable : chaque année, et à intervalles annuels, on retirera une somme qui excède de 10 % le retrait précédent. Le premier retrait a lieu un an après le placement et le dernier dix ans après le placement. Quel est le montant du premier retrait ? Ecrire la suite employée et montrer qu'elle est géométrique. Taux annuel 3 %.

2. On donne une demi-sphère de rayon r . Par un point P de la circonférence du grand cercle qui la limite, on mène une tangente à ce cercle. Par cette tangente passe un plan qui fait un angle x avec le plan du grand cercle et coupe la demi-sphère suivant un petit cercle. Exprimer en fonction de r et x le rayon de ce petit cercle, ainsi que l'aire de la portion de surface sphérique comprise entre les deux plans.

Perpendiculairement au plan du petit cercle et parallèlement à la tangente, on mène un troisième plan qui coupe le grand cercle en A et B, le petit cercle en C et D.

La distance de P à AB est $\frac{3}{2}r$. Montrer que l'aire du trapèze ABCD est

$$F = \frac{3}{4} r^2 \sqrt{3} \sin x (1 + \cos x).$$

Pour r constant, cette aire est une fonction de x . Former la dérivée première de cette fonction et l'exprimer au moyen de $\cos x$. Etudier la variation de l'aire quand x varie de 0 à 90° ; dire en particulier ce que devient le trapèze quand x tend vers 90° .

3. Une ellipse a pour équation $4x^2 - 16x + y^2 = 0$. Déterminer ses axes, son centre et ses foyers. Dessiner l'ellipse sur papier millimétré en prenant le cm pour unité.

Soit k le coefficient angulaire d'un diamètre de l'ellipse. Quelles sont l'équation de ce diamètre et celle du diamètre conjugué ? Le premier diamètre coupe la droite $x = 4$ en un point P. Former l'équation de la perpendiculaire menée de P au diamètre conjugué. Montrer que cette droite coupe l'axe des x en un point fixe, indépendant de la position de P sur la droite $x = 4$.

Soit S l'intersection de cette perpendiculaire et du diamètre conjugué. Trouver

par le calcul l'équation de la ligne décrite par S lorsque k varie. Comment peut-on voir par la géométrie pure quelle courbe on doit obtenir ? Pourquoi le centre de l'ellipse appartient-il à cette ligne ?

Traduit par J.-M. CHEVALLIER.

L'enseignement de l'astronomie.

De nombreux correspondants sont à la recherche de renseignements sur l'enseignement de l'astronomie au niveau élémentaire, sur les moyens, en particulier, d'organiser un club d'astronomie, etc... Que ceux à qui je n'ai pu répondre veuillez bien m'excuser d'avoir trop tardé à le faire, faute de temps. En collaboration avec notre Collègue Mougenot, et en réunissant toutes les informations qui me seront fournies d'ici là par les clubs d'astronomie, nous publierons une documentation aussi complète que possible dans le *Bulletin* d'octobre.

Sans attendre, je veux signaler toutefois les réalisations de deux collègues, F. BERLATIER à Marseille et A. FOUCHÉ à Paris.

F. Berlatier a dessiné une carte de l'hémisphère céleste boréal, de format 100×110 cm, et une carte de la zone équatoriale (déclinaisons comprises entre -40° et $+30^\circ$), de format 250×40 cm. Cette dernière carte est spécialement indiquée pour suivre les mouvements du Soleil.

Reproduites par héliogravure, ces cartes sont présentées de trois façons :

- a) muettes,
- b) avec les noms français des Constellations,
- c) avec des numéros sur les Constellations et une légende en marge de la carte.

Leur format rend ces cartes très pratiques pour l'affichage en classe.

Notre Collègue les fournit (franco de port) aux conditions suivantes : Hémisphère boréal, 600 F ; Zone équatoriale, 500 F ; les deux cartes, 1 000 F. Bien préciser à la commande le type demandé *a*, *b* ou *c*, et faire le virement à F. Berlatier, professeur, 40, boulevard des Arènes, Marseille (B.-du-R.), C.C.P. Marseille 1 013 00.

La réalisation de notre Collègue Fouché est présentée ainsi qu'il suit dans *Facteur X*, la sympathique revue qui nous est chère et qui doit tant à l'ami Fouché :

« Une carte pratique du ciel étoilé... vient d'être réalisée par les Editions du Levier à l'intention des élèves de Sixième et des élèves des grandes classes, suivant les principes, chers à « Facteur X », de simplicité et d'efficacité maxima.

Elle est formée de trois parties dont les deux premières sont les calottes polaires, jusqu'à 50° des pôles en deux cercles de 15 cm de diamètre environ. La troisième partie, la plus importante, est la zone équatoriale, de -45° à $+45^\circ$ de déclinaison, sur une bande de bristol demi-souple pouvant être cintrée en cylindre, ce qui permet une représentation très proche de la réalité, ou bien déroulée à plat, ce qui permet les mesures d'ascension droite et de déclinaison.

En réalité, cette bande est formée elle-même de deux parties, de 10 cm sur 30 cm environ, pouvant se recouvrir partiellement d'un côté ou de l'autre, ce qui permet son utilisation pratique à toute heure de la nuit et à toute époque de l'année. Dans ce même but, au-dessous, sur toute la longueur, un tableau à double entrée, à lecture directe, donne la zone du ciel qui se trouve au sud au moment de l'observation et la carte est aussitôt orientée par rapport au ciel. »

Prix de lancement, valable seulement pour le premier tirage de 1 000 cartes :

150 F par unité, 125 F chaque par groupe de cinq, 100 F chaque par groupe d'au moins vingt.

Rappelons l'adresse : Editions du Levier, 15, rue du Louvre, Paris, 1^{er}, C.C.P. Paris 10 020-06.

Rappelons aussi que l'abonnement à *Facteur X* est de 500 F (375 F pour cinq abonnements groupés). Enfin, que chaque numéro donne, en plus de tout le reste, des indications sur les observations astronomiques simples à faire avec ou sans instrument.

G. W.

Cybernétique, qu'es-tu ?

Sans prétendre à la moindre compétence en la matière, je crois utile de réunir sous la même rubrique le rappel de livres déjà anciens et un nouvel ouvrage.

La cybernétique, par G.-Th. GUILBAUD, est un volume de la collection « Que sais-je ? », qui a paru en 1954. C'est un modèle de ce que tous les livres de cette collection devraient être : une introduction très accessible à des idées ou à des études nouvelles. La cybernétique, « science carrefour », est présentée en quatre chapitres dont les titres soulignent le caractère « étrange » : Gouvernement et gouvernail ; Réseaux et circuits ; Signaux et messages ; Pilotes, stratèges et joueurs. Dans la conclusion, l'auteur dit fort bien : « La cybernétique, étant jeune, est curieuse de tout, et touche à tout non sans quelques maladresses. »

Les notions de base, par Louis COUFFIGNAL, premier volume d'une collection nouvelle « *Information et Cybernétique* » (un volume in-8°, 60 pages ; Gauthier-Villars, Paris, 1958 ; prix 600 F) a donc pour but de commencer à mettre un peu d'ordre dans cette science qui, quatre ans plus tard, a tout de même pris de l'âge.

Après un bref historique qui analyse l'ouvrage de Norbert Wiener (voir plus loin), M. l'Inspecteur général Couffignal entreprend la tâche délicate de préciser les définitions : sur l'information, sur la cybernétique elle-même (chap. 3 : La cybernétique est l'art de rendre efficace l'action), sur les domaines de la cybernétique. Enfin, le dernier chapitre précise les concepts de base de cette science nouvelle.

Personne n'était mieux qualifié que le Directeur du Laboratoire de Machines mathématiques de l'Institut Blaise-Pascal, pour diriger une collection qui annonce des ouvrages sur *L'Automation* (par G.-R. BOULANGER), et sur *La Construction des machines automatiques* (par R. PRUDHOMME).

Cybernétiques or control and communication in the animal and the machine, par Norbert WEINER est le classique fondamental de la Cybernétique. Il a paru pour la première fois en 1948, en anglais (Hermann, éditeur). Le même éditeur en fait une réédition, dix ans plus tard, toujours en anglais (un volume, 194 pages ; 17×23, prix 1 200 F). Les rapprochements entre comportement humain et fonctionnement des machines qui sont l'originalité de l'œuvre, n'ont pas perdu, dix ans après la première édition, leur puissance de choc.

Pensant à tous les usages abusifs que la grande presse fait des mots nouveaux, Guilbaud dit, du « feed-back », qu'il est trop fameux. Il est vrai que l'expression originale de Wiener est plus expressive que celle de rétro-action ou alimentation en retour.

Il est vrai que, par commodité de langage (commodité ou moindre effort), on met aussi de la cybernétique partout. Dans *Les Lettres nouvelles*, du 22-4-59, M. P. Barbaud écrit un article sur « L'avènement de la musique cybernétique » (prospec

systématique des possibilités d'un thème musical). A la première lecture, on pense à une plaisanterie du genre Salvador Dali ; mais il ne faut pas se fier à ces impressions trop hâtives.

Il me semble qu'on ne peut guère se lasser de reprendre le livre de Wiener, soit qu'il irrite, soit qu'il enchante ; il fait toujours penser. Ce n'est pas parce que les marchands ou certains journalistes parlent de cybernétique comme d'électronique — je veux dire avec une égale incompétence — que nous devons négliger une science toute imprégnée de Mathématiques. Je tiens à répéter que, sans aucune compétence spéciale, je signale ces trois ouvrages à l'attention des Collègues curieux, les plaçant dans un ordre qui me paraît le plus conforme à une lecture aussi agréable qu'enrichissante.

G. W.

Physique mathématique.

Les principes de la théorie électromagnétique et de la Relativité, par Mme M.-A. TONNELAT ; un volume de 394 pages (16×25), cartonné toile demi-souple, 5 000 F, Paris, 1959.

Les membres de l'A.P.M. qui ont écouté les deux belles conférences sur la Relativité que leur fit Mme Tonnelat en 1958, apprendront avec plaisir la publication de ce magnifique ouvrage. Ils y retrouveront les qualités du professeur, son souci d'expliquer simplement, et sa science.

Dans l'introduction de ce livre, l'auteur expose en un raccourci saisissant comment la théorie électromagnétique de Maxwell, bien antérieure à 1905, était relativiste avant la lettre ; comment la relativité restreinte était le cadre nécessaire pour l'élaboration de la Relativité générale. Cependant, les phénomènes de gravitation bénéficient encore d'un traitement exceptionnel ; une théorie générale des champs reste à élaborer.

Si l'ouvrage s'ouvre donc sur les plus vastes perspectives de la physique mathématique, il doit cependant être particulièrement apprécié pour l'aide qu'il apportera au non-spécialiste, je peux en témoigner, pour l'étude d'ouvrages tels que celui de M. LICHNÉROWICZ (*Théories relativistes de la gravitation*). Mme Tonnelat reprend complètement et simplement l'exposé de la théorie électromagnétique, puis de la Relativité restreinte. Et avant d'étudier la troisième partie sur la Relativité générale, le lecteur peut étudier le complément mathématique : repérage dans un espace vectoriel euclidien, puis dans une variété métrique non euclidienne, avec application à l'espace de Riemann.

Ne serait-ce qu'à cause de cette dernière partie du livre, il serait souhaitable que l'ouvrage figure dans toutes les bibliothèques de nos Lycées.

La présentation matérielle, impression et reliure, sont au-dessus de tout éloge. La couverture, souple et résistante à la fois, est une qualité importante pour un ouvrage auquel on devra se référer souvent. Un seul regret : l'absence d'index alphabétique.

G. W.

Pour les taupins et les propédeutes.

Exercices d'analyse, par J. RIVAUD, tomes I et II, 209 p. et 251 p. ; chaque volume 2 200 F, Vuibert, éditeur, Paris, 1958-59.

Après les remarquables *Eléments d'algèbre moderne* qu'il nous avait donnés, en collaboration avec notre Collègue Lentin, J. Rivaud commence par ces deux tomes

d'exercices d'analyse une collection qui sera certainement de la plus grande utilité pour les élèves des classes préparatoires aux Grandes Ecoles et pour les étudiants des Facultés.

Ces deux livres portent sur les programmes de Mathématiques Supérieures et Spéciales ; un troisième est prévu pour cette dernière classe. D'autres suivront : un d'Algèbre, deux de Géométrie, un de Mécanique.

Le tome I traite des fonctions d'une variable ; le tome II, des fonctions de plusieurs variables.

La forme est très classique ; l'auteur s'en explique par la timidité des programmes de ces classes quant à la topologie. L'ouvrage qui rendra, pour la topologie, les mêmes services que les *Eléments d'algèbre moderne* déjà cités, reste à faire ; il devra être salué avec joie.

Tels qu'ils sont, ces deux livres représentent un travail considérable qui sera certainement fructueux.

A noter, dans le tome II, la notation u_x ou f_x pour la dérivée partielle de $u = f(x, y, z)$. De même u_{xx} . Simplification typographique heureuse, semble-t-il. On appréciera particulièrement, dans ce tome II, les nombreux exercices inspirés par des questions essentielles de la Physique.

G. W.

Nouvelles tables numériques pour les fonctions usuelles de l'analyse, par L. FLAVIEN ; Gauthier-Villars éd., 63 pages, relié toile, 13×20,5 cm. ; prix 400 F.

Ce nouveau recueil est particulièrement conçu pour les classes préparatoires aux Grandes Ecoles. On y trouve les tables des carrés et des cubes, des racines carrées et cubiques des entiers de 1 à 10 000 ; les logarithmes décimaux et népériens des nombres de 1 à 1 000 ; la fonction 10^x pour x variant de 0 à 1 par centièmes, les fonctions circulaires (arcs en degrés et grades) et les fonctions inverses, ainsi que des tables de conversion pour les mesures d'angles. Il n'y a pas de formulaire annexé.

Si l'ouvrage est spécialement destiné aux élèves des grandes classes, rien ne s'oppose à son utilisation dans les classes de Mathématiques Élémentaires et Sciences Expérimentales (et même les classes précédentes, si l'usage des tables numériques s'y généralisait comme il serait souhaitable). On constate avec plaisir que le degré d'arc y est divisé en dixième. Les tables de Danjon avaient le même avantage, mais elles ne sont pas destinées aux élèves qui sont embarrassés par leur précision ; on se contente ici de quatre décimales.

On peut regretter que la fonction e^x ne figure pas, alors que les logarithmes népériens y sont. Par hasard, j'ai trouvé une faute, heureusement rectifiable : $\text{tg } 19^\circ = 0,3443$ et non $0,2443$.

La bonne présentation du livre, son format maniable, sont à signaler.

G. W.

Pourquoi nous travaillons, par Jean FOURASTIÉ, un volume de la collection « *Que sais-je ?* » (P.U.F.).

Exposant sous une forme remarquablement accessible les grandes lignes d'une véritable science économique, ce volume de 120 pages peut être considéré comme une conséquence particulièrement heureuse d'un stage de Sèvres sur « L'éducation devant les problèmes de la vie quotidienne ». Il se présente comme un outil à mettre entre les mains de tous les éducateurs, professeurs de Mathématiques compris, qui voudront mieux comprendre et faire comprendre les mécanismes du progrès économique.

Après avoir exposé *pourquoi* nous travaillons (hormis l'oxygène, l'homme ne trouve rien sur la Terre qui soit immédiatement bon à sa subsistance) et *comment* nous travaillons (sciences et techniques, division et organisation du travail, d'où découle la division désormais classique entre les trois ordres d'activité primaire, secondaire et tertiaire), le chapitre III traite du rationnement (inévitables) et des moyens de le réaliser : suit une très simple théorie des profits et la définition du « revenu national ». Les chapitres suivants sur les revenus, les prix, l'emploi et les salaires, la sécurité sociale, ont le mérite de condenser l'essentiel en 30 pages et d'éviter au lecteur profane (je parle pour moi) l'embarras des grands traités. Chapitre VII et conclusion sur niveau de vie et genre de vie, insistent sur une idée bien connue de l'auteur : que le progrès technique, au sens le plus large du terme, est l'élément primordial du progrès économique grâce à l'amélioration de la productivité qu'il permet.

Ce bref aperçu d'un livre qui ne se résume pas (car il est trop dense) ne montre pas encore en quoi les professeurs de Mathématiques sont particulièrement concernés par lui. Mais à la suite d'un tableau qui donne l'évolution du prix réel (en heures de travail) du kilogramme de pain, de 1801 à 1955, M. Fourastié écrit : « Des tableaux tels que celui-ci ou des graphiques qui en seraient tirés, et qui seraient propres à faire comprendre le mécanisme de l'amélioration du niveau de vie des peuples, devraient être présentés aux enfants et au public dans les écoles, les usines, les mairies, les musées technologiques... » (p. 106). Que certains travaux pratiques de Mathématiques puissent avoir le double avantage de familiariser les élèves avec la méthode graphique et avec les faits économiques, qui s'en plaindra ?

Enfin, l'évolution du genre de vie, conséquence inéluctable de l'élévation du niveau de vie, comporte l'allongement et la transformation de la scolarité. En une courte phrase, M. Fourastié soulève ainsi le vaste problème de la réforme de l'enseignement et de la rénovation des méthodes et des programmes. Si ce problème nous intéresse au premier chef, pouvons-nous ignorer ou négliger de quelle réalité économique il provient ? Cela suffirait à souligner l'intérêt du livre de M. Fourastié pour tous les éducateurs.

Quelques remarques incidentes peuvent évidemment prêter à la critique. L'auteur, plaidant avec chaleur en faveur des « sciences humaines », écrit que « l'homme moyen a beaucoup plus intérêt au progrès des sciences humaines qu'à celui des sciences physiques ». On se demande si la relation d'inégalité s'imposait, d'autant que l'irrégularité du progrès scientifique est... la règle. Ailleurs, M. Fourastié note la rareté de l'innovation créatrice. Si plus de 15 milliards d'hommes ont vécu sur la Terre, 5 000 au plus, dit-il, ont été des innovateurs. Mais est-il si facile de distinguer l'innovateur de celui qui apporte un perfectionnement essentiel à l'innovation d'un autre ? Nombres peu convaincants, en fin de compte.

Mais, de telles remarques sont bien de troisième ordre et ne sont dites ici que pour montrer avec quelle attention ce livre de petite dimension, mais de grande portée pédagogique, mérite d'être lu.

G. W.

Remarque : Voulant illustrer par une image la croissance indéfinie des besoins économiques, M. Fourastié écrit curieusement (p. 42) : « Ainsi, à mesure que le volume intérieur d'une sphère s'accroît, s'accroît aussi le volume de l'espace extérieur avec lequel elle est en situation d'échanges. »

Recherches algébriques sur le théorème de Picard-Montel, par Jean ANASTASSIADIS, préface de Paul Montel, un volume 52 pages, 17×23 ; Hermann, 1959 ; prix 900 F.

L'ouvrage traite le problème suivant : étant donnée une fonction entière définie

au moyen de son développement taylorien, reconnaître si elle admet une valeur exceptionnelle, déterminer cette valeur si elle existe.

Manuel pratique du test de Rorschach, par Mme LOOSLI-USTERI, un volume 216 pages, 17×23 ; Hermann, 1959 ; prix 1 680 F.

Mme Loosli-Usteri, qui enseigne les sciences de l'éducation à Genève, donne ici la deuxième édition (complètement refondue) de son ouvrage, « Diagnostic individuel chez l'enfant au moyen du test de Rorschach » (1938). L'étude est étendue aux adultes.

L'auteur tient à préciser que ce livre est un manuel pratique, non un traité. Il se borne aux faits essentiels, éprouvés par une longue pratique.

Pour une information complète sur la méthode on se reportera à l'ouvrage même de Rorschach : « *Psychodiagnostic. Méthodes et résultats d'une expérience diagnostique de perception* ». Traitant de psychologie générale, ces ouvrages sont d'un vif intérêt pour tous les éducateurs soucieux de la connaissance de l'enfant.

G. W.

Ouvrages reçus.

- J.-P. THÉOCLISTE : *Cours d'algèbre*, 2^e T M des E.N.P. et Collèges techniques, Dunod, 412 pages, 1 800 F, broché.
- J. QUINET : *Calcul intégral et premières applications*, 2^e édition, Dunod, 260 pages, 960 F.
- C.-E. TRAYNARD : *Eléments de statistique et de calcul des probabilités*, Dunod, 136 pages, 840 F.

AGRÉGATION DE MATHÉMATIQUES (Hommes)

Concours de 1958

Rapport de M. l'Inspecteur général DONTOT, Président du Jury

Le jury était composé de M. DONTOT, Inspecteur général de l'Instruction publique, président ; M. COMBES, professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse, vice-président ; M. Y. MARTIN, professeur à la Faculté des Sciences de Rennes ; M. HERVÉ, professeur à la Faculté des Sciences de Nancy ; M. EUVRARD, professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée Hoche, à Versailles ; M. RICHE, professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée Henri-IV.

ÉPREUVES ÉCRITES

Elles ont eu lieu les 19, 20, 22, 23 mai, de 8 heures à 15 heures.

Le nombre des candidats inscrits est en 1958 de 250 ; il était en 1957 de 234 ; il a donc augmenté de 16 unités. Mais, à notre avis, ce qui importe pour définir quelques résultats numériques caractérisant un concours d'agrégation par rapport aux autres, c'est de rapporter ces résultats au nombre des candidats qui ont subi la totalité des épreuves écrites. Ils étaient 182 en 1955, 185 en 1957 et 193 en 1958. L'augmentation apparente du nombre de ces candidats (+ 10 entre 55 et 58) correspond à une augmentation réelle plus importante ; en 1955 le nombre des reçus à l'agrégation de Mathématiques (hommes) a été de 25, il est passé à 42 en 1957, ceci signifie que le nombre des candidats sur lesquels sont prélevés les agrégés a diminué pendant cette période de 17 unités. L'augmentation réelle du nombre des candidats est donc de 25 à 30 unités.

L'agrégation masculine de Mathématiques est donc un concours dont la situation est saine, puisque l'augmentation du nombre des reçus n'entraîne pas une diminution du nombre des candidats (nous rappelons que, comme dans les rapports précédents, la rédaction et le calcul des pourcentages tiennent compte seulement des candidats ayant subi la totalité des épreuves écrites). Il faut observer cependant que 57 candidats se sont fait inscrire et ont renoncé à se présenter au concours, ou bien ont abandonné avant la fin des épreuves écrites. Certes, le nombre des défaillants de la dernière minute est élevé dans tous les concours et, à l'agrégation masculine de Mathématiques, il a toujours été d'une importance préoccupante ; il représente depuis trois ans 22 ou 23 % du nombre des inscrits. C'est un déchet non négligeable et la stabilité de ce pourcentage à un moment où les préparations s'organisent, se multiplient, attirent un nombre croissant de candidats, révèle l'existence de causes permanentes qui sont, pour une catégorie déterminée de candidats, un obstacle insurmontable à la préparation du concours.

Ces causes permanentes ont été signalées à diverses reprises dans les rapports précédents. Depuis quelques années déjà, les licenciés d'enseignement de Mathématiques éventuellement disponibles pour occuper un poste d'enseignement ont totalement disparu ; les postes non pourvus par un titulaire au mouvement annuel sont de plus en plus nombreux et ne peuvent être pourvus non plus par les autorités universitaires locales, lesquelles n'ont plus de licenciés disponibles ; il devient alors nécessaire de solliciter les professeurs en exercice et nombreux sont ceux qui, par devoir, acceptent la charge écrasante d'un double service ou d'un service très alourdi. Nous avons pointé les noms des 57 défaillants de l'agrégation de Mathématiques en 1957 ; 47 d'entre eux sont, en effet, des professeurs en exercice, et pour

la plupart des professeurs déjà anciens qu'il est impossible de confondre avec les quelques velléitaires qui s'inscrivent chaque année et ne se présentent jamais. On peut donc affirmer que la presque totalité des candidats défailants est composée de professeurs en exercice qui ont sacrifié leur préparation à l'agrégation à des obligations professionnelles, ou qui ont renoncé à abandonner leurs élèves pour aller passer l'écrit, alors que ceux-ci étaient à la veille de leurs propres examens. En gros, il est raisonnable de conclure que la principale raison des abandons est que la date du concours est choisie en mai, époque où les professeurs en exercice sont fatigués ou ne peuvent se résoudre à quitter leurs élèves, même pour une dizaine de jours.

L'agrégation est le concours de recrutement de l'Enseignement du Second Degré par excellence ; le devoir du jury est de choisir, parmi les candidats, un nombre d'agrégés aussi grand que possible, dignes de recevoir ce titre, et susceptibles d'accepter un poste d'enseignant dans un des établissements dépendant des directions des Enseignements du Premier, du Second Degré ou du Technique en permettant en outre aux plus qualifiés d'accéder directement à l'Enseignement Supérieur ou à la Recherche. L'expérience a nettement démontré que ce résultat ne peut être le seul bénéfice d'un aménagement technique des conditions du concours ; pour augmenter le nombre des agrégés, il faut augmenter celui des candidats. Le tableau annexé à ce rapport, intitulé : Statistique des candidats, indique l'origine de ceux-ci et la situation administrative au 1^{er} octobre 1958 de ceux qui ont été nommés agrégés. On constate que sur les 117 professeurs en exercice (tableau I), qui ont remis les quatre compositions écrites, 23 ont été agrégés, 20 occupent, au 1^{er} octobre 1958, ou occuperont plus tard un poste d'enseignant et que sur les 76 étudiants (tableau II), 30 ont été agrégés et 8 seulement occupent, au 1^{er} octobre 1958, un poste d'enseignant (les assistants exceptés). Il est donc clair que la récupération de 57 candidats de la première catégorie est, dans les conditions actuelles, un problème très important.

*
**

Le jury s'est réuni au Lycée Saint-Louis le vendredi 27 juin, à 9 h. 30 pour arrêter la liste des admissibles. Continuant la politique amorcée dans les années précédentes, il a très largement interprété les résultats des épreuves écrites et proposé pour l'admissibilité 90 candidats, c'est-à-dire 47 % des candidats ayant remis les quatre compositions écrites.

Le pourcentage des admissibles est donc passé de 27 % en 1955, à 47 % en 1958 ; il est difficile d'aller plus loin dans l'amélioration technique des épreuves écrites (choix des sujets, générosité des barèmes de corrections, libéralité dans l'appréciation des erreurs commises). La somme des notes obtenues pour les quatre épreuves écrites par les candidats admissibles est supérieure à 26,5 sur 80, c'est-à-dire à une moyenne sur 20 de 6,5, identique à la moyenne du dernier admissible en 1957.

Cette somme (sur 80) des notes des quatre compositions écrites est en 1958 comprise entre 26,5 et 55,5 (entre 6,5 et 13,9 sur 20). Nous avons déjà fait observer que ce sont les notes obtenues par les candidats classés les premiers qui renseignent sur la difficulté des épreuves ou la valeur des candidats. En effet, à partir d'un certain rang, la somme des notes obtenues par les concurrents est, pour le même rang, indépendante des circonstances et partant de l'année du concours.

Si l'on compare donc les résultats des épreuves écrites pour les candidats classés les premiers en 57 et 58, il faut admettre que ces résultats ont été plus brillants en 57 qu'en 58. Les cinq premiers à l'écrit en 57 avaient obtenu plus que le premier en 58 (le candidat classé premier en 1957 totalisait 65 points au lieu de 55,5 en 1958).

Nous n'attachons pas d'importance à cette petite histoire de l'agrégation ; il nous paraît essentiel, par contre, d'examiner le tableau déjà signalé : Statistique des candidats, où nous trouvons des indications sur l'origine des admissibles. Nous trou-

vons un tableau analogue dans le rapport sur l'agrégation de 1956 et la comparaison de ces deux tableaux montre que le nombre des professeurs en exercice, candidats effectifs à l'agrégation, est passé de 95 à 117, et celui des étudiants de 83 à 76 : le nombre des admissibles pour les professeurs en exercice est passé de 21 à 43, et pour les étudiants de 41 à 47. Ce sont donc les professeurs en exercice qui bénéficient de l'augmentation en nombre et en qualité des préparations et de l'allongement des listes d'admissibilité. Il faut s'en réjouir, car ils ont été jusqu'à présent les moins bien placés pour poursuivre leur préparation à l'agrégation.

**

Nous donnerons, en annexe, les rapports des correcteurs concernant chacune des compositions écrites.

EPREUVES ORALES

Elles ont eu lieu au Lycée Saint-Louis. La liste d'admissibilité a été arrêtée le vendredi 27 juin et publiée dans la soirée, elle comprenait 90 noms. Les candidats ont été répartis en deux séries : l'appel des candidats de la première série a été fait au Lycée St-Louis, le lundi 30 juin à 16 heures, l'appel des candidats de la seconde série a été fait au Lycée St-Louis le mercredi 9 juillet, à 9 h 30. Les épreuves pratiques, communes aux deux séries, ont eu lieu le 9 et le 10 juillet.

Les épreuves orales se sont terminées le samedi 26 juillet par la proclamation des résultats. Les candidats les moins favorisés de la première série ont donc séjourné 14 jours pleins à Paris, ceux de la seconde série 19 jours. Les charges correspondantes, d'à peu près 3 000 F par jour, sont extrêmement lourdes pour les provinciaux et nous nous préoccupons de les réduire au minimum. Les candidats fonctionnaires sont bien remboursés d'une partie de leurs débours, mais, en ce qui concerne le séjour, sur la base des tarifs d'hospitalisations dans les Lycées [or, en juillet, la possibilité d'hospitalisation dans un des Lycées de la rive gauche est théorique et les candidats sont, soit chez des particuliers, soit à l'hôtel].

Dès 1959, les épreuves pratiques étant supprimées et remplacées par une épreuve de « Mathématiques appliquées », qui est une des quatre épreuves écrites de la nouvelle agrégation, nous pourrions convoquer les candidats à Paris par séries de 15 à 20 candidats et limiter à une semaine la durée du séjour obligatoire à la disposition du jury. Nous aurons réalisé alors un aménagement, sur le plan économique et social, des épreuves orales que nous jugeons essentiel.

Chaque candidat ayant à présenter au jury deux leçons d'une heure, c'est donc 180 leçons que le jury aurait dû entendre. L'expérience a démontré que plus le nombre de leçons à juger est élevé, plus il faut de réunions du jury et de réunions de plus en plus longues ; plus il faut aussi ménager de repos pour la réflexion et la méditation. Pour un oral de 180 leçons, il fallait compter au minimum 45 jours. Il n'a pas paru souhaitable de faire siéger le jury jusqu'au 15 août et de retenir les candidats à Paris jusqu'à cette date ; M. le Ministre a donc admis qu'un sixième membre serait ajouté aux cinq qui, traditionnellement, constituent le jury d'agrégation de Mathématiques et que, pour les épreuves orales, un sous-jury de trois membres examinerait les candidats présentant une leçon de Mathématiques Élémentaires pendant qu'un autre examinerait les candidats présentant une leçon de Mathématiques Spéciales.

Cet aménagement, conforme au Statut de l'Agrégation, a permis de terminer les épreuves orales à la date ordinaire, cette année, le 26 juillet. Les difficultés pratiques ont été très sérieuses ; elles ont été résolues grâce à l'obligeance de l'Administration du Lycée St-Louis, qui a trouvé les locaux nécessaires pour mettre en cellule six

candidats à la fois. Mais cette solution est provisoire ; elle comporte un risque non négligeable. Le Statut de l'Agrégation précise, en effet, que le nombre des juges ne peut être inférieur à trois et aucun de ces juges ne peut être remplacé par un autre au cours des épreuves orales. Il suffirait donc qu'un des membres du jury soit indisponible au cours de ces épreuves pour qu'elles se trouvent suspendues.

Il n'en pas, heureusement été ainsi en 1958, et les oraux n'ont été marqués que par deux incidents, dus à l'étourderie de deux candidats. Ceux-ci ne se sont pas présentés à l'heure et au jour où ils avaient été convoqués ; ils n'ont pas été éliminés, mais la note zéro a été attribuée aux deux leçons non faites par eux.

L'augmentation du nombre des étudiants en sciences, donne à penser que le nombre des candidats à l'agrégation de Mathématiques ne diminuera pas dans les années à venir ; la solution provisoire des deux sous-jurys deviendra donc très vraisemblablement une solution définitive et il faudra, par prudence, augmenter le nombre des juges. Il est vraisemblable que cette augmentation sera nécessaire dès 1959.

**

Les épreuves pratiques ont eu lieu au Lycée St-Louis, le calcul le mercredi 9 juillet de 14 h 30 à 17 heures, et l'épure le 10 juillet de 8 à 12 heures.

Les textes de calcul numérique, de l'épure, les rapports des correcteurs de ces deux épreuves et les rapports sur les leçons d'oral, sont donnés en annexes au présent rapport.

Nous rappelons qu'en 1958, le programme commun aux deux agrégations, masculine et féminine, de Mathématiques était fixé par la note du 13 septembre 1957 (*B.O.E.N.* n° 34 du 26-9-57). Le programme réduit des épreuves orales par la note du 16 septembre 1957 (*B.O.E.N.* n° 34 du 26-9-57).

**

RESULTATS GENERAUX

Les totaux des notes obtenues par les admissibles pour l'ensemble des épreuves en 1958 sont compris entre 98 et 306 ; ils étaient en 1957 compris entre 80 et 343.

Le jury a proposé pour le titre d'agrégé les candidats ayant obtenu pour l'ensemble des épreuves un minimum de 184 points, c'est-à-dire une moyenne de 9,2 sur 20, égale à celle qui avait été exigée l'année dernière. Cinquante-trois candidats remplissaient cette condition, cinquante Français et trois Etrangers.

Les propositions du jury ayant été acceptées, la liste des agrégés de Mathématiques, à la suite du concours de 1958, a été lue le samedi 26 juillet au Lycée St-Louis (salle Depange) et affichée aux lieux habituels. Les candidats français ont été classés de 1 à 50 ; les candidats à titre étranger, conformément à la loi, ont reçu des numéros *bis* : un Vietnamien a été classé 20 *bis*, et deux Tunisiens : 33 *bis* et 46 *bis*.

Douze candidats admissibles, classés à l'écrit après le 53^e, figurent sur la liste des agrégés : ils doivent ce résultat à la qualité de leurs épreuves orales. Enfin, dix-huit des agrégés avaient été admissibles dans les concours précédents.

**

La statistique des candidats, présentée sous forme d'un tableau (page 312 du présent rapport), résume aussi complètement que possible les résultats de l'agrégation 1958.

Elle montre d'abord qu'il y a 40 % d'étudiants et 20 % de professeurs en exer-

cice reçus agrégés ; ces pourcentages traduisent éloquentement les conséquences de l'inégalité des conditions de présentation au concours pour les étudiants et les professeurs, exposée dans la première partie de ce rapport.

Les huit dernières colonnes du tableau indiquent quelle était, à la date du 1^{er} octobre 1958, c'est-à-dire après affectation à un poste pour l'année scolaire, la situation administrative de chaque agrégé. Pour interpréter ces renseignements, il convient de se souvenir que les candidats aux agrégations en 1958 n'ont pas été tenus de signer, comme les candidats des agrégations des années précédentes, l'engagement d'occuper pendant cinq années un poste *dans un lycée*. Ils ont donc demandé en toute liberté leur affectation, soit comme professeurs dans une Ecole Normale, dans un Lycée, ou dans un Etablissement technique, soit comme professeurs détachés, soit comme assistants de Faculté ou comme chercheurs au C.N.R.S. Les élèves des Ecoles Normales ont pu également demander à effectuer une quatrième année d'Ecole.

Le dépouillement des vœux exprimés dans ces conditions a montré, comme on pouvait s'y attendre, que les professeurs en exercice ne souhaitent que de continuer comme agrégés leur carrière de professeurs ; ils demeuraient fidèles à leur vocation et fidèles aussi au public auquel ils étaient habitués puisque aucun d'eux ne demandait à changer de Direction.

La réalisation des vœux de ces professeurs n'a donc soulevé pour l'administration aucune difficulté, mais la nécessité de pourvoir les chaires de Mathématiques Élémentaires vacantes a contraint celle-ci à demander à dix de ces professeurs sur onze d'accepter l'aventure d'un changement de résidence, et par conséquent, d'un déménagement. Deux seulement, dont les charges familiales sont particulièrement lourdes, ont demandé et obtenu de n'être mutés qu'en octobre 1959 ; les huit autres avec une simplicité tranquille ont accepté comme un devoir de leur nouvelle dignité une nomination dans une ville souvent fort éloignée de leur domicile actuel. Nous sommes heureux de signaler à tous ceux qui, lisant ce rapport, s'intéressent à l'agrégation et aux agrégés cette unanimité dans le consentement à un sacrifice difficile reconnu nécessaire ; disons bien haut que c'est à cause du sens du devoir dont ont fait preuve les professeurs en exercice devenus agrégés que la situation créée par les demandes — souvent injustifiées — des étudiants devenus agrégés n'a pas tourné à la catastrophe.

Trente étudiants, en effet, ont été nommés agrégés ; l'un d'eux, élève de l'Ecole Normale Supérieure de la rue d'Ulm, a été tué dans un accident de la route le lendemain de la publication de la liste d'admission ; un autre a été appelé au service militaire avant d'avoir pu être affecté, vingt-huit étudiants, devenus agrégés, ont donc reçu une première nomination. On constatera (voir la Statistique) que 20 d'entre eux, c'est-à-dire 72 % de l'effectif total, ont demandé une affectation, soit comme assistants ou chefs de travaux dans l'Enseignement Supérieur et ont d'ailleurs obtenu cette affectation quel que soit leur rang. Huit seulement des agrégés étudiants acceptaient un poste dans le Second Degré, quatre en vue d'un détachement au Maroc, en Tunisie ou dans une école militaire, les quatre autres dans la métropole. Il restait donc, au moment où venaient d'être créées 27 nouvelles classes préparatoires aux Grandes Ecoles, dans la métropole, quatre professeurs nouveaux, agrégés de 1958, soit 14 % de la totalité de ces derniers.

M. le Ministre de l'Education Nationale, informé de la gêne tragique dans laquelle la Direction du Second Degré allait être mise par l'affectation suivant leurs vœux des nouveaux agrégés, a bien voulu examiner lui-même le problème avec M. le Directeur général, en présence du Président du jury d'agrégation. Il a décidé, en conclusion de cet examen, que les agrégés de 1958 seraient affectés conformément aux vœux exprimés par eux et aux propositions des diverses directions, ceci pour tenir les engagements pris par ses prédécesseurs, mais que, dans les années à venir, une répartition équitable devrait être faite, qui garde à l'agrégation son caractère essentiel de concours de recrutement de l'Enseignement du Second Degré et corrige

l'inégalité et l'arbitraire des pourcentages de 1958. Ceux-ci sont les suivants : 72 % pour la Recherche et l'Enseignement Supérieur, 14 % pour les détachements, 14 % pour le Second Degré (pourcentages établis pour la catégorie étudiants).

Cette dérobade des jeunes agrégés devant les servitudes d'un des métiers, qui est cependant un des plus beaux qui soient, est regrettable ; on peut épiloguer sur les raisons qui l'expliquent, mais il est malheureusement incontestable qu'elle se traduit par un manque d'agrégés inquiétant et compromet le recrutement en professeurs des classes terminales de nos Lycées (Mathématiques Élémentaires et classes préparatoires aux Grandes Ecoles). En 1958, au cours des deux mouvements annuels, il a été pourvu 35 chaires de classes préparatoires aux Grandes Ecoles et 64 chaires de Mathématiques Élémentaires de Lycées de garçons ; la mise en place de ce personnel a nécessité 118 nominations, qui devaient être et qui auraient été dans une période normale, 118 nominations d'agrégés. Or, il n'a été possible de pourvoir que 70 postes — au lieu de 118 — par des agrégés ; les 48 postes restants l'ont été par du personnel féminin (21), des licenciés (25), des contractuels (2). Il est clair que le manque d'agrégés compromet déjà le fonctionnement normal des classes de Grandes Ecoles et des classes de Mathématiques Élémentaires, c'est-à-dire de l'ensemble des classes les plus caractéristiques et les plus admirées (par les étrangers) de l'Enseignement Secondaire français, les plus essentielles aussi puisqu'elles forment, actuellement encore, la quasi-totalité des futurs ingénieurs.

*
**

Nous avons dit, au début de ce rapport, que la situation de l'agrégation masculine de Mathématiques était saine, en ce sens que le nombre des candidats authentiques ne diminue pas et même augmente, bien qu'en moins de cinq années le nombre des agrégés de chaque promotion ait doublé (25 en 1955, 50 en 1958). Se bien porter est une situation provisoire qui n'autorise qu'exceptionnellement un excès ; l'agrégation a fourni en 1958, 53 agrégés, il serait vain d'espérer qu'elle en fournira davantage en 1959, si, d'ici là, le nombre des candidats n'a pas augmenté. Actuellement, on peut dire que tout ce qu'il était techniquement possible de faire pour améliorer le rendement a été fait ; presque la moitié des candidats sont déclarés admissibles de façon à être examinés à l'oral. Il serait inutile de pousser plus loin l'admissibilité ; cette libéralité dangereuse n'augmenterait pas de façon sensible le nombre des agrégés ; celui-ci n'est actuellement limité que par la seule qualité des candidats.

Le rapport général de la Commission d'étude pour le recrutement et la formation des personnels scientifiques de l'enseignement et de la recherche, créé par arrêté du 20 novembre 1957, a reconnu « le très haut niveau du concours d'agrégation » (de mathématiques, physique, sciences naturelles), « concours polyvalent conduisant aussi bien vers les diverses directions d'enseignement que vers le C.N.R.S. » et recommandé pour l'agrégation de Mathématiques quelques aménagements d'un caractère technique. En ce qui concerne l'agrégation masculine de Mathématiques ces aménagements ont pour objet principal de diminuer l'effort physique que nécessitent les épreuves. La durée des épreuves écrites sera ramenée de sept à six heures (comme pour l'agrégation féminine), les épreuves pratiques seront remplacées par une épreuve unique, composition dite de calcul appliqué ; les compositions de Mathématiques Élémentaires et de Spéciales seront remplacées par une composition unique de six heures. Enfin, le jury cessera d'être condamné au silence et des questions pourront être posées aux candidats, une fois la leçon entendue.

Ces modifications seront appliquées dès 1959 à titre d'essai. Il est vraisemblable qu'elles n'entraîneront, ni diminution, ni augmentation du nombre des agrégés. Elles respectent le partage des coefficients ; à l'écrit 5 pour l'ensemble des deux compositions portant plus particulièrement sur les programmes des lycées et des classes

préparatoires, et 5 pour les deux compositions portant sur le programme de la licence. A l'oral, les coefficients sont inchangés. L'écrit imposera moins de fatigue aux candidats ; l'oral également, la préparation des leçons ayant une durée de trois heures pour chacune d'elles. Nous regrettons la dénomination de : Mathématiques appliquées, adoptée pour l'épreuve destinée à remplacer le calcul numérique et l'épure, depuis que la réforme de la licence utilise le même terme pour caractériser une licence d'enseignement, ce qui pourrait amener une confusion sur les programmes respectifs de ces épreuves.

Ce même rapport recommande la création d' « une commission permanente composée des cinq directeurs qui devrait être chargée d'étudier les problèmes généraux et la répartition des agrégés ». Si cette commission avait pu fonctionner dès 1958, la répartition des agrégés aurait été plus conforme aux besoins réels des différentes directions ; nous savons qu'elle pourra étudier ce problème pour le concours de 1959.

L'augmentation nécessaire du nombre des agrégés ne peut plus maintenant résulter que de l'augmentation du nombre des candidats. C'est pour hâter cet accroissement que la réforme de la licence a été mise en application dès octobre 1958 ; il faut souhaiter que ses effets se traduisent rapidement par un afflux de candidats.

Nous ne terminerons pas ce rapport sans dire, une fois encore, notre gratitude aux professeurs qui assument la lourde tâche de préparer les candidats ; les préparations se multiplient et rendent de très grands services. La préparation, organisée par le Centre National d'Enseignement par Correspondance, en particulier, permet à des professeurs isolés dans de petits collèges ou à l'étranger, ainsi qu'à des malades, de participer au concours dans de bonnes conditions. Nous remercions l'exceptionnelle qualité de ces préparations. Nous remercions aussi les membres du jury qui subissent avec bonne humeur les épreuves de l'agrégation de l'autre côté du tapis vert, malgré la charge effroyable qu'elles représentent.

Statistique des candidats à l'agrégation masculine de Mathématiques ayant remis les quatre compositions écrites

SESSION 1958

Professeurs en exercice

	CANDIDATS	ADMISSIBLES	REÇUS	SITUATION DES AGRÉGÉS AU 1 ^{er} OCTOBRE 58							
				Prof. 1 ^{er} Degré	Prof. 2 ^e Degré	Prof. détachés	Prof. technique	S. M. congrès	C. N. R. S. 4 ^e année	Assis- tants	Décès
Enseign. 1 ^{er} Degré.	4	3	3	3							
Enseign. 2 ^e Degré.	68	28	12		10	1		1			
Détachés	20	3	1			1					
Enseign. Technique.	10	3	3			1	2				
Prof. en congé, Serv. militaire	7	2	1		1						
Candidats étrangers.	8	4	3								
Totaux	117	43	23	3	11	3	2	1			

Etudiants — Assistants — C.P.R.

	CANDIDATS	ADMISSIBLES	REÇUS	PROFESSEURS 1 ^{er} DEGRÉ	PROFESSEURS 2 ^e DEGRÉ	PROFESSEURS DÉTACHÉS	PROFESSEURS TECHNIQUE	S. M. CONGÉS	C. N. R. S. 4 ^e ANNÉE	ASSISTANTS	DÉCÈS
E.N.S. Ulm	14	14	10		1				7	1	1
E.N.S. St-Cloud ...	15	12	10		2	3		1	2	2	
E.N.S. E.T.	1	1	0								
C.P.R.	14	1	0								
Etudiants	20	9	4		1	1				2	
Assistants	12	10	6							6	
Totaux	76	47	30		4	4		1	9	11	1

Résultats généraux

	CANDIDATS	ADMISSIBLES	REÇUS	PROFESSEURS 1 ^{er} DEGRÉ	PROFESSEURS 2 ^e DEGRÉ	PROFESSEURS DÉTACHÉS	PROFESSEURS TECHNIQUE	S. M. CONGÉS	C. N. R. S. 4 ^e ANNÉE	ASSISTANTS	DÉCÈS
Etudiants, assistants, C.P.R.	76	47	30		4	4		1	9	11	1
Prof. en exercice ..	117	43	23	3	11	3	2	1			
Totaux	193	90	53	3	15	7	2	2	9	11	1

RAPPORTS ANNEXES

A. — Compositions écrites

I. COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES (Correcteur : M. RICHE)

Les connaissances qui permettaient de résoudre le problème proposé ne dépassaient pas celles que l'on peut exiger d'un bon élève de la classe de Mathématiques Élémentaires. Le texte étant rédigé de manière à épargner aux candidats des recherches laborieuses quant aux méthodes à utiliser, le correcteur était en droit de se montrer assez exigeant sur la qualité du raisonnement.

La première partie du problème aurait pu s'intituler ainsi : Etude des coniques dont un foyer appartient à un cercle fixe et qui coupent ce cercle en trois points fixes, distincts ou non.

La question (I, 1°) n'a arrêté que quatre candidats. Toutes les démonstrations correctes ont été admises. Signalons, toutefois, que l'emploi d'une inversion de pôle A permettait d'aborder plus aisément l'étude de la question (I, 2°). Celle-ci semble avoir constitué un obstacle sérieux pour la plupart des candidats. La correspondance entre q et r n'est pas toujours présentée de façon satisfaisante : il fallait faire ressortir qu'à un point q correspondait, en général, quatre points r distincts, homologues de q dans quatre rotations fixes. Tant bien que mal, au prix de pénibles détours, accompagnés de nombreuses maladresses, ces quatre rotations furent mises en évidence. Il était inutile de « calculer » les angles de rotation en fonction d'angles dont on ne sait plus très bien, après plusieurs lignes de calculs fastidieux, s'ils sont angles d'axes ou de droites. Chacune de ces rotations apparaissait comme produit de deux symétries axiales. Ainsi le cercle Aqr passait par l'un quelconque des centres des cercles tangents aux trois côtés du triangle $AB'C'$ (B' , C' homologues de B , C dans l'inversion considérée). Ce point de vue a été fatal à de nombreux candidats. Oubliant l'origine de la question, ils ont cherché à montrer que les homologues de ces points étaient les points O , O_A , O_B , O_C , par des procédés exempts d'élégance et souvent incorrects. D'autres ont tout simplement admis le résultat indiqué par l'énoncé. Il était pourtant très simple d'utiliser des droites QR particulières, méthode utilisée avec succès par les meilleurs. Ainsi, faute de sang-froid, beaucoup de candidats ont brisé leur élan sur une étude que le libellé du texte avait contribué à rendre pourtant très accessible.

Dans (I, 3°) les réponses aux questions posées n'étaient plus indiquées et le correcteur se proposait de juger le candidat sur son aptitude à présenter clairement une discussion. Il est regrettable que cette question n'ait jamais été traitée de façon satisfaisante. Dans la partie a) peu de candidats signalent le cas particulier où F appartient à un côté du triangle ABC et celui où F est équidistant des points A , B , C . Une discussion logique conduisait naturellement à la considération de tels cas. Dans la partie b), le cas où Δ est tangente à l'une quelconque des paraboles, qui admettent pour foyer un sommet du triangle ABC et pour directrice le côté opposé, n'a été mentionné dans aucune copie.

La question (II, 1°) ne présentait pas de difficultés nouvelles. Il suffisait d'adapter la méthode utilisée dans le cas de points A , B , C distincts. On pouvait aussi, pour mettre en évidence les points U et V , utiliser le théorème de Pascal, bien qu'une telle méthode ne fût pas dans l'esprit du problème. Ceux qui ont trouvé des dispositions limites fausses pour les points U et V auraient pu rectifier leur erreur en réfléchissant à l'introduction du point L dans la question suivante !

Le début de la question III faisait appel à des considérations très simples. Mais ici encore que de calculs pour aboutir souvent à des conclusions douteuses ! Un candidat à l'agrégation devrait savoir que l'égalité $A\phi' = \phi'\phi$ n'entraîne pas nécessairement que ϕ' soit le milieu du segment $A\phi$.

La question (III, 4°), plus difficile, n'a été traitée que dans quelques copies. On pouvait utiliser le théorème relatif à la différence des puissances d'un point par rapport à deux cercles ou, de façon plus expéditive, les points d'intersection des cercles Σ et $\mathcal{L}$ avec la droite AF' . L'orthogonalité de Σ et du cercle orthoptique résulte du fait que ce cercle orthoptique et le cercle point F' définissent un faisceau d'axe radical Δ' , directrice associée à F' .

La deuxième partie comportait une introduction relative aux surfaces (F, Δ, e) : les résultats de (I, 1°) et (I, 2°) sont bien connus.

La question : « La surface engendrée par rotation d'une conique autour de son axe non focal peut-elle être considérée comme une surface (F, Δ, e) ? » présente quelques difficultés. Aucun candidat ne les a soupçonnées. Les questions qui suivent n'ont été qu'effleurées ; aucune étude sérieuse n'a été présentée à leur sujet. Les candidats aux prochains concours sont invités à y réfléchir.

Pour terminer, nous insisterons sur l'importance que revêt la rédaction pour la

clarté du raisonnement. Beaucoup de bonne volonté est nécessaire pour imaginer « le cercle qui passe par F et admet A et B pour points de Poncelet », ou « la bissectrice de l'angle $\widehat{AF'F}$ ». Le candidat qui écrit : « Une inversion de pôle A transforme (β) et (γ) en des cercles concentriques » exprime un résultat faux différent de celui qu'il veut mettre en évidence.

Nous voudrions aussi signaler quelques erreurs grossières difficilement pardonnables :

« Si deux points distincts A et C d'une conique Γ sont équidistants d'un foyer de cette conique, la médiatrice de AC est axe de Γ . »

« Si un point A est intérieur à deux cercles, ceux-ci sont sécants. »

« Le produit de deux inversions est une inversion. »

« Il existe un seul cercle d'un faisceau tangent à un cercle donné. »

« A et B désignant deux points d'une conique Γ , si une directrice de Γ coupe la droite AB en un point extérieur au segment AB, Γ est nécessairement une ellipse. »

RENSEIGNEMENTS STATISTIQUES. — 213 copies ont été soumises à correction. Trois d'entre elles se dégagent nettement auxquelles ont été attribuées les notes 18, 17,5 et 17. Le candidat classé 4^e à cette épreuve, en dépit de quelques maladroresses, a fait preuve, lui aussi, de sérieuses qualités dans le domaine de la géométrie élémentaire. Les notes suivantes sont : 14, 13,5 13 (3 fois), 12,5 (4 fois), 12 (3 fois), 11,5 (4 fois), 11 (5 fois), 10,5 (6 fois), 10 (5 fois). Soient 37 notes supérieures ou égales à 10. Nous relevons ensuite :

35 notes supérieures ou égales à 8 et inférieures à 10,	
36 — — — 6 — 8,	
42 — — — 4 — 6,	
42 — — — 2 — 4,	
21 notes inférieures à 2.	

Ainsi un barème extrêmement généreux a-t-il permis de porter à 6,25 la moyenne des notes attribuées à ces 213 copies.

Les résultats rappellent sensiblement ceux des années précédentes.

II. COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES (Correcteur : M. EUVRARD)

STATISTIQUES. — Bien que la moyenne de l'épreuve, 5,25 (contre 4,84 en 1957) semble marquer une légère amélioration, la composition de Mathématiques Spéciales reste particulièrement faible dans l'ensemble du concours d'agrégation.

Et, pourtant, l'examineur avait pensé favoriser la plupart des candidats en ne proposant pas un problème sur les coniques et quadriques.

Mais, en fait, 92 candidats sur 207 n'ont pas été capables de commencer l'intégration d'une équation différentielle de la forme $y = f(y')$ — baptisée parfois « équation de Lagrange simplifiée » —, ou même de former cette équation, ce qui est tout de même surprenant de la part de candidats qui ont tous le certificat de calcul différentiel et intégral. Chez les autres, trop souvent, abondent les fautes de calcul, et la question des signes relève souvent de la plus haute fantaisie.

45 candidats n'ont pas abordé les parties II et III ; quatre ne disent pas un mot sur la partie I et il y a trois copies blanches. Enfin 37 candidats seulement ont tenté d'aborder la partie III, mais aucun n'a obtenu les relations demandées en $u'_1/u_1 \dots$, deux ou trois se contentant d'affirmer qu'en opérant comme au II on aurait le même

système, ce qui est strictement faux, les vecteurs dérivés $\frac{d\vec{OT}_1}{ds} \dots$, n'étant plus alors dans le plan Q remplaçant le plan P.

Deux candidats, un de Paris, un de province, ont remis des copies ne comprenant pas l'intercalaire n° 2. Si ce début d'épidémie devait s'étendre, il deviendrait indispensable que les candidats indiquent sur la première page de leur composition le nombre d'intercalaires fournis, et que les surveillants d'écrit en vérifient l'exactitude en ramassant les copies.

Le barème de correction adopté, fort généreux, a permis d'obtenir une copie notée 19, une 17,5, deux 14, une 13,5, une 13... ; en tout 22 copies ayant 10 et au-dessus. 79 candidats ont des notes supérieures ou égales à 6, et 128 notes n'atteignent pas 6.

Par rapport à l'année 1957, on peut signaler moins de copies ayant de très bonnes notes, un moins grand nombre également ayant 0 ou 0,5 (quatre 0 cependant). La note la plus fréquemment attribuée est 6 (29 fois). La courbe des notes, ascendante jusque-là, présente alors une chute brusque, séparant nettement les candidats en deux catégories. En bonne logique, seuls les 50 candidats ayant obtenu 7 ou au-delà auraient dû pouvoir être déclarés agrégés, ce qui n'a pas eu lieu en fait.

L'impression d'ensemble est donc celle d'une composition *très terne*, indiquant un trop grand nombre de candidats médiocres et peu de sujets brillants.

ANALYSE DU SUJET ET DES FAUTES COMMISES. — Avant d'examiner les diverses parties du problème, il faut encore dénoncer *avec vigueur* la lamentable présentation de la plupart des copies, et, malheureusement, cette année, des meilleures copies. Ce sont de vrais brouillons, raturés, surchargés, assortis quelquefois de figures innombrables. Il ne faut pas demander si les résultats ou conclusions (quand il y en a !) sont encadrés ou soulignés. Les axes n'ont pas de noms, les vecteurs pas de flèches ou épisodiquement ; les abréviations abusives pullulent, même dans des copies de deux ou trois pages seulement, qu'on aurait pourtant pu, en sept heures !, prendre le temps de rédiger. Un certain nombre de candidats semble n'avoir aucune idée de ce que devrait être un tableau de variations ; on y trouve de vagues flèches, aucune valeur aux limites, aucune barre de séparation lors d'un changement de sens de variation ; tout se chevauche, mais on s'en sert, paraît-il, pour tracer la courbe. Qu'arrivera-t-il dans quelques années si les futurs élèves de nos lycées sont soumis à de telles écoles ?

Partie I. — C'était un problème « taupinal » classique. Construction de « courbes telles que » en coordonnées cartésiennes et polaires, suivies d'une transformation simple permettant de passer de l'une à l'autre, et de l'étude des propriétés de cette transformation.

1) En coordonnées cartésiennes, la courbe cherchée est une développante de deux demi-chainettes, ce fait étant dû aux « longueurs » introduites par l'énoncé. Les autres développantes sont de même définies par des relations du genre $\frac{a}{MT} + \frac{b}{MN} = 1$ ce qu'un seul candidat a vu clairement, et ce qui s'explique facilement, géométriquement, en prenant pour point de départ la tractrice classique. Il est vrai que certains candidats appellent « tractrice » toute développante de chainette !

La formation de l'équation différentielle est souvent laborieuse et son intégration se fait par nombre de procédés divers. Pourtant la présence de l'expression $\sqrt{1+y'^2}$ invitait, en accord avec la signification géométrique de y' , à poser $y' = \operatorname{tg} \varphi$. Signalons l'oubli, par près des trois quarts des candidats de la solution singulière $y = \pm a$. Quelques-uns construisent la courbe sans intégrer, mais leurs explications, parfois strictement absentes, se rapprochent plus du sentiment que de la rigueur logique.

Trop peu nombreux sont ceux qui, par quelques considérations de symétrie ou de translation, ont su se ramener au seul cas $y' > 0$, $y > 0$, qui évitait les chaussetrapes des doubles signes. Les rebroussements ne sont que rarement justifiés. Dans

beaucoup de copies, ils sont de deuxième espèce pour des raisons très variées. On lit dans une copie : « le rebroussement est de première espèce, comme le prouve la figure » !, dans une autre, c'est parce que x'' et y'' ne sont pas nuls tous les deux. L'aire demandée a très rarement été calculée juste.

Les maladresses de calcul ne se comptent pas, les plus fréquentes consistant à calculer x' en dérivant l'expression de x que l'on vient d'obtenir par quadrature, ou à calculer le rayon de courbure en A par des méthodes variées (parfois une page et demie), quand on vient de préciser la développée de la courbe. A ce propos, l'examineur a été surpris de lire dans une copie où la développée est obtenue (fausse !) comme lieu du centre de courbure, la phrase suivante, qui montre une certaine inconscience de la part d'un candidat à l'agrégation : « La développée de C_0 est une droite et C_0 est une développante de droite. »

Deux candidats toutefois se sont aperçus que les cercles centrés sur Ox et de rayons $a\sqrt{2}$ coupent les courbes (C) sous un angle de 45° .

On aimerait aussi voir disparaître l'expression, hélas ! presque canonisée, d'« équations paramétriques » qui méconnaît totalement le véritable sens du mot « équation » appliqué à une courbe.

2) En coordonnées polaires, très peu de choses à dire, car il n'y a pas plus de 20 copies qui donnent, avec plus ou moins de bonheur, un vague tracé de la courbe. Aucun candidat n'a su étudier la concavité. Constatons tristement que les coordonnées polaires semblent totalement ignorées de presque tous.

3) Trop peu s'essais sur une partie pourtant facile et qui pouvait être abordée sans même avoir résolu les paragraphes 1) et 2). On y lit la surprenante affirmation : « la transformation T conservant les arcs est une *isométrie* ». Mais comme une droite devient une chaînette, dans la mesure des « distances », le mètre doit alors être avantageusement remplacé par la chaîne d'arpenteur plus souple. Dans deux autres copies la transformation dépend de la courbe à transformer, ce qui ne laisse pas d'être assez inquiétant !

4) L'examineur voulait laisser aux candidats la possibilité de montrer, dans un choix approprié d'exemples leur intelligence de la question et leur initiative dans la recherche. Hélas ! neuf candidats ont cité quelques exemples évidents, tel $y = a$ donne $\rho = a$, ce qui n'a pas dû les fatiguer beaucoup, puisque $y = \rho$. Un seul a à peu près compris ce qu'on pouvait attendre de lui.

Partie II. — Elle consiste dans la recherche de courbes de l'espace, connaissant les mesures de MT, MN, MB en fonction d'un paramètre fixant le point M sur la courbe, ce qui tente de généraliser la recherche des « courbes telles que » de la géométrie plane données à l'aide de tangentes et normales.

Les relations demandées ont été assez facilement trouvées par les candidats sans détours inutiles, mises à part quelques introductions malencontreuses des coordonnées x et y .

Au 1) on aurait pu penser que les courbes pour lesquelles, par exemple, le vecteur $\vec{n}$ est parallèle au plan $P(xOy)$ étaient bien connues. Il n'en est rien, et la plupart, ayant exprimé $\vec{n} \cdot \vec{k} = 0$ dérivent cette relation au lieu d'intégrer, ne comprenant pas qu'ils en tireront des conditions nécessaires mais non obligatoirement suffisantes, et qu'une vérification finale s'imposera.

On trouve souvent comme réponse des hélices « d'axe Oz » (quand ce ne sont pas des hélices tout court). Faut-il alors comprendre des hélices « circulaires » !

Mais ce ne sont pas là les seules fautes de bon sens !

Un candidat, sans sourciller, trouve $\vec{b} = 0$ et $\vec{t}$ et $\vec{n}$ colinéaires !

Un autre conclut : « donc M est dans un plan parallèle à P » comme s'il n'en était pas toujours ainsi dès l'instant où le plan n'est pas autrement qualifié.

Le reste du problème n'est que rarement abordé. Personne n'a justifié correctement l'existence d'une courbe (C) à partir de la donnée de u, v, w , et la nécessité de la relation $uu' + vv' + ww' = u(u^2 + v^2 + w^2)$ n'a manifestement pas été comprise sauf dans deux copies. Le correcteur a eu l'impression nette que les candidats l'ont trouvée parce que l'énoncé demandait de la chercher. On pouvait justifier l'existence de (C) en tirant du système (1) R et $\mathcal{C}$ (trois équations pour deux inconnues, d'où une condition) et utiliser les résultats classiques sur les courbes données par leurs courbure et torsion en les adaptant au cas actuel, ou raisonner directement en utilisant la projection (Γ) de (C) sur P dont on avait l'équation intrinsèque. Mais, de toute façon, un vague aperçu était insuffisant.

Aucun candidat n'a pu traiter l'exemple β qui terminait la partie II. L'exemple α l'a été par un candidat au moyen de considérations correctes de cinématique.

Signalons pour terminer les grossières fautes suivantes :

$$|d\vec{V}| = d|\vec{V}|;$$

les courbes à courbure constante sont sphériques ;

$A + B = 0$ entraîne $A = 0$ et $B = 0$ (A et B étaient des expressions algébriques) ;

$$\text{de } u^2 + v^2 + w^2 = \frac{1}{z^2} \text{ on déduit } \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} + \frac{w'}{w} = -\frac{z'}{z};$$

$$I = \int_0^\varphi \frac{\cos t dt}{ch^2 t} \text{ se comporte quand } \varphi \rightarrow +\infty \text{ comme } \int_0^\varphi \frac{dt}{ch^2 t}; \text{ or } \frac{1}{ch^2 t} \sim e^{-2t} (?)$$

$$\text{et } I \rightarrow \int_0^\varphi e^{-2t} dt = 1;$$

pour écrire qu'un vecteur $\vec{U}(\alpha, \beta, \gamma)$ (en l'occurrence $\vec{U} = \frac{d\vec{OT}}{ds}$) est dans le plan P ($ux + vy + wz - 1 = 0$) on écrit : $u\alpha + v\beta + w\gamma - 1 = 0$.

Peut-on honnêtement déclarer agréés des candidats qui commettent de telles erreurs ?

III. COMPOSITION DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL (Correcteur M. Y. MARTIN)

RÉSULTATS STATISTIQUES. — 199 composants. Moyenne générale 7,26 sur 20. Meilleures notes : 19 (deux fois) ; 18,5 ; 18 ; 17 ; 16,5 (2 fois) ; 16 (2 fois) ; 15,5 (4 fois) ; 15 (5 fois), etc...

Répartition. —

NOTE x	$x < 2$	$2 \leq x < 4$	$4 \leq x < 6$	$6 \leq x < 8$	$8 \leq x < 10$	$10 \leq x < 12$	$12 \leq x < 14$	$14 \leq x < 16$	$16 \leq x < 18$	$x \geq 18$
effectif.....	18	29	46	27	22	19	17	12	5	4

L'énoncé proposait l'étude de quelques propriétés de séries trigonométriques et de séries de Fourier. Il était précédé d'un long rappel de définitions et notations classiques destiné à éviter toute erreur d'interprétation.

Le sujet abordé dans chacune des quatre parties de problème était signalé par un

titre. Le projet initial de la 3^e partie avait été volontairement amputé de la question III, 5°) qui traitait de la convergence absolue de la série de Fourier d'une fonction lipschitzienne d'ordre $\alpha > \frac{1}{2}$. Les parties étaient placées dans l'ordre des difficultés croissantes, l'énoncé étant très détaillé jusqu'au III, 3°) et devenant beaucoup plus laconique à partir du III, 4°).

Cette année, quatre bonnes copies se sont détachées du lot, révélant des qualités incontestables mais non exceptionnelles. Les copies médiocres ont bénéficié de la comparaison, ce qui explique, avec la réduction voulue de la difficulté de l'épreuve, que la moyenne générale atteigne cette année 7,26.

Première partie. — De trop nombreux candidats confondent encore convergence d'une série avec le fait que l'ensemble des sommes partielles soit borné. Un candidat, noté 0, malgré quatre pages de « solution », allait plus loin encore, affirmant qu'une série était convergente ou divergente suivant que son terme général tendait vers zéro ou vers l'infini ! Tous les termes de la série (5) sont nuls à partir d'un rang qui dépend de x . La plupart des candidats ont alors succombé à la tentation d'en déduire la convergence non uniforme de (5) sur A , confondant ainsi la carence d'une méthode pour démontrer la convergence uniforme avec la démonstration de la propriété contraire. Une vingtaine de copies seulement donnèrent une solution correcte,

remarquant par exemple que $\sin n!x = 1$ pour $x = \frac{\pi}{2n!}$.

Le I, 3°) risquait de dépayser nombre de candidats. Une vingtaine de copies, là encore, furent à peu près satisfaisantes, et un seul candidat pensa que si $\sum a_n \cos nx$ convergeait absolument pour tout x de E , elle convergeait absolument en particulier pour la valeur 0 qui appartient à E , ce qui implique la convergence absolue pour tout x .

Le I, 4°) eut un meilleur sort. Le cas $x_0 = k\pi$ fait exception uniquement pour les séries de sinus, ce que trop peu de candidats mirent clairement en évidence.

La deuxième partie demandait des justifications précises. Elle était destinée à étudier un exemple montrant qu'il n'était pas possible d'améliorer les inégalités (11). Aucun candidat ne fit ce rapprochement.

Malgré le préambule, de nombreux candidats ne virent pas la nécessité de démontrer que les a^k étaient coefficients de Fourier de la somme de la série étudiée.

Comme α était inférieur à 1, c'est la *majoration* de $F(x+h) - F(x-h)$ par $(2C_1 + C_2)a^q$ et la *minoration* de hb^{q+1} par 2 qui entraînaient la condition de Lipschitz cherchée ; quelques candidats seulement le réalisèrent.

La troisième partie constituait le plat de résistance, alors que la quatrième était réservée à une minorité. L'établissement de la formule classique (8) fut généralement bien traité, l'égalité utile

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u} du = \frac{\pi}{2}$$

résultant, par exemple, de la formule (6). Cependant, plusieurs candidats, dont l'un faisait par ailleurs bonne impression, se crurent autorisés à remplacer dans (8) $f(t)$ par la « somme » de sa série de Fourier, se laissant probablement abuser par l'expression « développement » en série de Fourier.

Plusieurs candidats, animés de bonnes intentions, comparèrent (9) et (11) dans le cas $\alpha > 1$, oubliant de remarquer qu'alors la condition (3) implique la constance de $f(x)$. Le III, 4°) ne fut traité complètement par personne, mais quelques copies

montrèrent des initiatives heureuses. La majoration de $\left| \varphi(u) \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u} \right|$ par

$\frac{\pi}{2} M u^{\alpha-1}$ permettait de trouver un nombre η , indépendant de n et de x conduisant à une intégrale majorée par ϵ . Un choix convenable de $f_1(u)$ linéaire par morceaux, nulle sur $[0, \eta]$ et interpolant linéairement (u) sur $\left[\eta, \frac{\pi}{2}\right]$ assurait la continuité de la fonction $f_2(u) = \psi(u) - f_1(u)$, condition nécessaire pour que f_2 soit lipschitzienne. Un calcul simple, abordé par quelques-uns, montrait alors que $\frac{f_2(u)}{\sin u}$ était également lipschitzienne. L'application de l'inégalité (II) achevait alors la démonstration.

L'énoncé de la quatrième partie laissait une très grande initiative, bien trop grande au gré de certains. Cette liberté de mouvement, jointe à une fatigue compréhensible, suscita les « démonstrations » les plus fantaisistes. La majoration de la dérivée $\frac{dS(x, n)}{dx}$ résulte de son expression même (somme de n cosinus) et résout

le cas $0 \leq x \leq \frac{2n}{2n+1}$, le cas contraire se traitant par exemple par application de la deuxième formule de la moyenne.

Le calcul des coefficients de Fourier de $G(x)$ demandait essentiellement de vérifier que les intervalles

$$I_k = [2^{k^2+1} - 2^{k^2}, 2^{k^2+1} + 2^{k^2}]$$

ne se recouvraient pas. Une évaluation classique, de la somme des n , premiers termes de la série harmonique, permettait alors de démontrer que les « groupements »

$$\sum_{2^{k^2+1}}^{3 \cdot 2^{k^2}} a_n$$

tendent vers $\frac{\log 2}{2}$ quand k tend vers l'infini, ce qui assure la divergence de la série de Fourier de $G(x)$ pour la valeur $x = 0$. Par contre, la série obtenue en groupant les termes correspondant aux intervalles I_k est la série $\sum \frac{1}{k^2} R(x, k)$ qui converge normalement.

La lecture des copies révèle souvent un manque de maturité de leurs auteurs, qui semblent n'avoir pas le recul suffisant pour assimiler les connaissances acquises hâtivement. Puisse l'Education Nationale avoir la sagesse de renoncer, malgré ses besoins impérieux, à une « formation accélérée » de ses professeurs, qui conduirait inévitablement à une « malformation » des esprits qui lui sont confiés.

COMPOSITION DE MÉCANIQUE RATIONNELLE (Correcteur : M. COMBES)

Le problème proposé cette année aux candidats était plus court et plus facile que ceux des deux concours précédents : telles étaient du moins l'intention et l'impression de son auteur. L'étude du mouvement d'une sphère homogène pesante sur une surface fixe (S) avec contact parfaitement rugueux, est fort classique et a fait l'objet de nombreux problèmes de licence ou de concours. Dans le problème de l'agrégation masculine de 1946 était examiné le cas où la surface (S) est une gouttière cylindrique à génératrices horizontales, dans celui de l'agrégation féminine de 1949 le cas où (S) est une sphère. Il s'agissait cette fois d'étudier le cas où (S) est une surface de révolution d'axe vertical.

La première question, distincte des autres puisque le frottement y était négligé, est traitée dans tous les cours de mécanique sous une forme équivalente : mouvement d'un point pesant sur une surface de révolution d'axe vertical. Si elle avait été introduite en début de problème, c'était afin de marquer les différences avec la suite, notamment pour les mouvements dans lesquels le centre de gravité G de la sphère décrit un parallèle ; c'était aussi pour permettre aux candidats d'acquérir aisément quelques points.

On abordait ensuite le thème véritable du problème, en supposant désormais le contact parfaitement rugueux. Avant l'étude du cas général, la deuxième question proposait l'étude du cas où (S) est un cône. Les calculs sont alors simplifiés ; le mouvement de G est régi par deux équations $\rho^2 \beta' = C^e$ et $\rho'^2 = F(\rho)$; pour la discussion, pour l'étude des mouvements à ρ constant... il suffit d'appliquer les méthodes habituelles.

La troisième question demandait aux candidats d'établir les équations du mouvement lorsque (S) est une surface de révolution quelconque. Comme dans la précédente, l'énoncé indiquait la marche à suivre. Le problème se ramène dans le cas général à l'intégration d'une équation différentielle linéaire du second ordre, donnée explicitement dans le texte, et dont les coefficients ne dépendent que de la surface (S') sur laquelle le contact de la sphère et de (S) oblige le point G à se mouvoir. Le coefficient numérique $2/7$ provient des hypothèses faites sur la répartition des masses (sphère homogène). On pourrait seulement supposer que la sphère admet son centre pour centre de gravité et que son ellipsoïde central d'inertie est une sphère ; seul le coefficient $2/7$ serait éventuellement modifié.

La quatrième question fournissait un exemple simple d'intégrabilité. Le traité de Routh signale les cas où la surface (S') est une sphère ou un paraboloïde de révolution. Plus généralement, on demandait d'établir que l'intégration est possible lorsque (S') est une quadrique de révolution, ce cas correspondant à une propriété très simple de l'équation que le texte désigne par (F) , et qui admet alors deux solutions dont le produit est constant.

Enfin la cinquième question demandait de caractériser les mouvements à ρ constant (il suffit d'utiliser les équations obtenues à la troisième question), puis d'étudier leur stabilité (ce qui constituait sans doute la partie la plus difficile du problème).

Il serait trop long de relever toutes les erreurs commises. Citons, en raison de leur fréquence et de leur importance, les trois suivantes.

De nombreux candidats utilisent simultanément, et sans paraître s'en rendre compte, deux orientations différentes dans le plan méridien $\rho O z$: pour certains angles

le sens positif adopté est tel que $(\vec{O\rho}, \vec{Oz}) = +\frac{\pi}{2}$, pour d'autres $-\frac{\pi}{2}$. Suivant les copies, les conséquences de cette négligence vont de simples erreurs de signes à une profonde altération des résultats.

On a souvent appliqué, et c'était effectivement commode, le théorème du moment cinétique en I , point de contact de la sphère et de (S) . La formule comporte alors un terme correctif dû au mouvement de I . Presque toujours on a affirmé que ce terme correctif disparaît parce que, en raison du non-glissement, la vitesse de I est nulle : c'est faux. C'est en effet la particule de la sphère qui se trouve en I à l'instant considéré, qui a une vitesse nulle ; mais l'expression même qu'on obtient pour le moment cinétique, et qu'on dérive par rapport au temps, montre que ce moment est constamment calculé au point I invariablement lié à GZ et défini par $\vec{IG} = a$, et la vitesse de ce point n'est, ni nulle, ni parallèle à celle de G .

Enfin rappelons que l'utilisation des équations de Lagrange (qui, d'ailleurs, n'était pas à conseiller ici) oblige à prendre des paramètres de position, et qu'on ne peut faire jouer le rôle de paramètres à des composantes de vitesses ou de rotations instantanées. Plusieurs candidats ont commis cette faute ; l'un d'eux, à la suite de

calculs très critiquables, est pourtant arrivé à des résultats exacts : par un heureux hasard, il avait en fait écrit les équations d'Appell, qui se prêtent, elles, à l'emploi de pseudo-paramètres. Il ne pouvait évidemment être question de le récompenser de sa chance.

193 candidats ont participé à cette dernière épreuve écrite. Aucun n'a abordé l'étude de la stabilité dans la cinquième question ; un seul, le meilleur, a trouvé à la quatrième les quadriques de révolution. Sa copie, notée 18, a servi d'élément de mesure. Les meilleures notes attribuées sont : 18 (1 fois), 17 (1 fois), 15 (1 fois), 14,5 (3 fois), 13,5 (3 fois), 13 (3 fois), 12 (4 fois). Il y a 31 notes supérieures ou égales à 10, 35 entre 7 (compris) et 10 (exclu) ; 64 notes ne dépassent pas 3. La moyenne de l'épreuve est 5,65. Au concours de 1957 les chiffres correspondants étaient les suivants, pour 187 copies corrigées : 17 notes supérieures ou égales à 10, 64 entre 7 et 10, 49 inférieures ou égales à 3 ; la moyenne de l'épreuve était 5,7. Si, donc, la répartition des notes est cette année plus régulière, *le lot de copies très faibles s'est encore accru*. Espérons que la raison de cette faiblesse est, au moins en partie, la fatigue des candidats lors de la quatrième épreuve de sept heures, et que la nouvelle structure du concours y remédiera dans l'avenir.

B. — Epreuves pratiques

I. CALCUL NUMÉRIQUE

a) Texte du calcul numérique

On considère l'équation différentielle

$$(1) \quad x(1-x)y'' + (2-3x)y' - y = 0.$$

1) Montrer que l'équation (1) possède une solution holomorphe dans le cercle $|x| < 1$, définie à une constante multiplicative près. Exprimer cette solution à l'aide de fonctions élémentaires.

2) Intégrer l'équation (1).

3) Déterminer la solution $z(x)$ de l'équation (1) vérifiant les conditions initiales :

$$z(2) = \frac{1}{2} ; \quad z'(2) = \frac{1}{4}.$$

Calculer, avec toute la précision possible, la valeur du maximum de $z(x)$ pour x réel supérieur à 1.

On donne : $\log_{10} e = 0,43429$ $\log_e 10 = 2,30259$.

b) Rapport du correcteur : M. HERVÉ

On donnait une équation différentielle linéaire homogène du second ordre, du type de Fuchs aux points $x = 0$ et $x = 1$, dont l'intégrale générale, dans le champ complexe, était $\frac{A \log(1-x) + B}{x}$; les deux premières questions consistant à trou-

ver cette intégrale générale, ne présentaient aucune difficulté. En particulier, il n'était nullement nécessaire de connaître le théorème de Fuchs ; dans la demi-douzaine de candidats qui ont néanmoins invoqué ce théorème, un seul l'a fait correctement : les autres croient qu'une équation du type de Fuchs en un point a toujours une solution holomorphe en ce point, ou encore que ce point peut être essentiel pour une solution de l'équation.

Pour l'intégration de l'équation, la marche de l'énoncé conduisait au calcul de l'intégrale $\int \frac{dx}{(x-1) [\log(1-x)]^2}$: une douzaine de candidats n'ont pas su faire ce calcul.

A la troisième question, on considèrerait, dans le champ réel, l'intégrale particulière $z = \frac{\log(x-1) + 1}{x}$, dont on demandait le maximum pour $x > 1$: autrement dit, il fallait calculer la valeur de x pour laquelle $(x-1) \log(x-1) = 1$.

Trois copies seulement, notées 20, 19, 18, ont donné la valeur demandée avec trois décimales exactes ; chez les autres, l'erreur la plus grave a consisté à calculer, par la méthode d'itération, la solution x_0 de l'équation $x = f(x)$, sans se préoccuper de savoir si $|f'(x_0)| < 1$.

La correction, suivant un barème généreux (10 pour les deux premières questions), a donné les résultats suivants :

un 20, un 19, un 18 ; 21 notes de 17 à 15 ; 33 notes de 14 à 12 ; 17 notes de 11 à 9 ; 11 notes de 8 à 6 ; 5 notes de 5 à 0.

II. ÉPURE

a) Texte de l'épure

Unité, le centimètre. Les données sont rapportées à trois axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy, Oz . L'axe Oy est porté par la ligne de terre et projeté suivant le petit axe de la feuille, orienté positivement de gauche à droite. L'axe Ox est de bout, l'axe Oz vertical. Ils sont projetés suivant une perpendiculaire à la ligne de terre passant à 3 cm à gauche du centre de la feuille.

On considère :

la droite (Δ) ($x = 10$; $z = y + 6$) ;

le cercle (C) de centre Ω (10, 0, 6), de rayon 5, situé dans un plan horizontal.

Une surface (S) est engendrée par une droite (G) rencontrant (Δ) et (C) de telle sorte que sa projection horizontale g reste tangente à la projection horizontale du cercle (C).

Les candidats pourront admettre que cette surface (S) est algébrique et du quatrième ordre. Ils sont invités à utiliser de préférence des raisonnements élémentaires de géométrie. Ils *construiront* pour chaque courbe demandée un point courant et la tangente en ce point, en le signalant par une lettre sur l'épure. Une notice donnera les explications demandées ou indispensables pour l'intelligence de l'épure.

1) Vérifier qu'il existe, sur la surface (S), deux droites verticales. Déterminer l'enveloppe des projections frontales des génératrices (G). Déterminer le contour apparent *frontal* de (S) *en projection* et dans l'espace. Montrer que le contour apparent *frontal dans l'espace* comprend une biquadratique (Γ) intersection de deux cylindres du second ordre, dont l'un a ses génératrices parallèles à (Δ).

2) On fait tourner autour de l'axe vertical (D) du cercle (C)

$$[(D) : x = 10 ; y = 0]$$

la biquadratique (Γ) obtenue au 1). Ses points réels engendrent une partie d'une surface de révolution algébrique (Σ). Construire la méridienne *complète* de cette surface (Σ). Nature de cette surface.

3) Construire l'intersection *complète* des surfaces (S) et (Σ). Préciser sa nature.

4) Étudier la nature de la section de la surface (S) par un plan horizontal quelconque. Construire avec soin la section par le plan de cote 18,5.

5) On convient d'appeler intérieur de (S) ou de (Σ) la portion d'espace, limitée par (S) ou (Σ) qui contient l'axe (D) du cercle (C). Représenter la portion d'espace opaque intérieure à la fois à (S) et à (Σ) et comprise entre les plans de cotes 6 et 18,5.

b) Rapport du correcteur : M. EUVRARD

Compte tenu du fait que cette épreuve était très facile et n'exigeait aucune érudition en géométrie descriptive, le correcteur peut se déclarer très déçu des résultats enregistrés.

La moyenne s'établit à 4,6 avec un barème très généreux. Huit épreuves seulement atteignent ou dépassent la note 10. On compte un 19, deux 14, un 12, deux 11 et deux 10.

Notons : a) qu'un trop grand nombre de dessins manquent de la marque du plus élémentaire bon sens ;

b) que les candidats ne lisent pas les comptes rendus des années antérieures. Ainsi furent pénalisées : les épreuves laissées au crayon ; les épreuves ne comportant aucun autre trait que ceux de la mise en place ; accompagnées de calculs analytiques donnant en général une partie de la solution (calculs faits, d'ailleurs, avec les axes donnés pour la mise en place, alors que la figure présentait un centre et un plan de symétrie évidents !). Ces dernières épreuves ont été notées zéro, la notice n'étant demandée (et utile) que pour expliquer éventuellement les résultats découverts sur le graphique ;

c) que les notices contiennent des absurdités. On y explique la construction (instantanée) d'une génératrice G (à grand renfort de « on rappelle tel point »), mais on affirme des résultats non évidents comme « la surface (Σ) est un hyperboloïde ». On y raisonne sur des figures auxiliaires de géométrie dans l'espace, souvent peu lisibles, alors que l'épreuve met en évidence les résultats que l'on demande : le cylindre du second ordre à génératrices parallèles à (Δ) et passant par (F) était immédiatement visible si l'on traçait sur l'épure sa génératrice passant par le point courant M de (F) . Il y a là une méconnaissance totale et grave du rôle de la géométrie descriptive. Cette épreuve avait été choisie précisément pour mettre ce rôle en évidence et montrer que cette géométrie descriptive, tant attaquée, n'est pas, et de loin, dénuée de tout intérêt et de toute utilité, comme on voudrait le faire croire, et peut, en particulier être fort précieuse pour l'étude des figures de l'espace ;

d) que ces mêmes notices pullulent de fautes de français ou d'orthographe des plus grossières ou des plus graves (on y lit, par exemple : « d'autre par »), qui permettent de douter sérieusement de l'intelligence de ceux qui les rédigent, impression que vient, hélas ! trop souvent renforcer leur contenu mathématique. Ainsi la biquadratique (Γ) , en tournant autour de l'axe de (C) situé dans son plan de symétrie de front $x = 10$, engendre un hyperboloïde de révolution. Malgré l'exemple et la mise en garde publiée dans le compte rendu de 1957, on lit dans de nombreuses notices, que ceci est dû au fait que les points de (Γ) qui se trouvent dans un plan horizontal n'y engendrent qu'un seul parallèle. A ce titre, en tournant autour de tout axe vertical du plan $x = 10$, (Γ) engendrerait une quadrique, ce qui est faux, puisque alors toute quadrique passant par (Γ) serait de révolution, sauf une et que l'on en connaît déjà deux qui ne le sont pas. D'ailleurs toutes ces quadriques ont le même centre, celui du cercle (C) , ce qui renforce l'impossibilité.

Nous n'insisterons pas sur les regrettables faiblesses de ces notices, sinon pour les déplorer de la part de candidats admissibles à une agrégation de Mathématiques.

C. EPREUVES ORALES

a) Leçons de Mathématiques Élémentaires. Rapporteur : M. HERVÉ

Le rapport sur le concours de 1956 notait avec satisfaction que, malgré l'augmentation du nombre des admissibles de 48 à 62, la moyenne des notes obtenues pour les leçons d'Elémentaires s'était maintenue à 11,5 (12,8 pour les reçus) ; en 1958, par contre, un accroissement du même ordre, de 69 à 90, du nombre d'admissibles,

s'est traduit par une forte baisse de la moyenne des leçons d'Elémentaires, tombée à 9,7 (11,5 pour les reçus). Le jury a dû, en effet, à plusieurs reprises, sanctionner par des notes très basses le désordre, le vide, le manque de rigueur, les raisonnements sur des êtres non définis.

S'il n'avait entendu tout cela, l'auteur de ces lignes n'oserait rappeler aux candidats qu'une leçon d'agrégation de Mathématiques est avant tout un exposé *logique* ; la logique veut d'abord qu'on définisse ce dont on parle, soit par une axiomatique nette et qui ose dire son nom, soit relativement à d'autres êtres antérieurement définis. Ensuite, un esprit logique ne peut apprendre des propriétés sans désirer en connaître les réciproques ; on ne saurait donc, sous aucun prétexte, se dispenser d'énoncer ces réciproques, et on ne peut se dispenser de les démontrer que si leur démonstration consiste à remonter celle de la proposition directe : faut-il rappeler qu'on peut alors démontrer à la fois les propositions directe et réciproque en raisonnant par conditions nécessaires et suffisantes ?

La logique veut enfin qu'on distingue avec soin les diverses formes d'un même problème, surtout si le langage les confond, surtout encore si elles sont proches l'une de l'autre en ce sens qu'on passe en quelques lignes de la solution de l'une à la solution de l'autre : expliquons-nous sur quelques exemples. Le langage « équation d'une parabole rapportée à un diamètre et la tangente à l'extrémité du diamètre » recouvre deux problèmes :

1) étant donné une parabole, un diamètre et la tangente à l'extrémité du diamètre, trouver l'équation de la parabole ;

2) étant donné deux axes obliques et un nombre p , montrer que $y^2 = 2px$ est l'équation d'une parabole et la placer par rapport aux axes.

De même les mots « génératrices tangentielles des coniques » recouvrent deux problèmes :

1) étant donné une conique, trouver des propriétés caractéristiques de ses tangentes ;

2) étant donné un cercle (ou une droite) C et un point F , enveloppe du second côté d'un angle droit dont le premier côté pivote autour de F et dont le sommet décrit C .

Les candidats qui ont fait ces deux leçons n'ont pas su distinguer les deux problèmes : celui qui a fait la première n'a traité (par d'affreux calculs d'ailleurs) que le premier problème, et s'est trahi en voulant montrer, comme application, que la projection cylindrique d'une parabole est encore une parabole.

Trop souvent encore, le candidat ne tient pas compte du niveau des élèves à qui il est censé s'adresser : en classe de Seconde, on ne définit pas l'homothétie de centre O , rapport k , en écrivant $\overrightarrow{OM'} = k \overrightarrow{OM}$, sans même dire que cette écriture implique l'alignement OMM' . En classe de Première la leçon « définition et signification géométrique de la dérivée d'une fonction pour une valeur donnée x_0 de la variable », ne peut pas raisonnablement supposer connue la notion de limite : on ne peut donc que choisir une fonction, former le rapport des accroissements de la fonction et de la variable, montrer que, pour x voisin de x_0 , il est voisin de telle valeur, et amener ainsi les auditeurs à la notion de limite ; il faudrait aussi expliquer ce qu'on entend par limite d'une sécante. Tout cela est difficile, donc ferait la valeur de la leçon.

Les leçons d'exemples donnent lieu à d'autres critiques. Tantôt elles sont trop pauvres : ainsi, le cas douteux de la résolution des triangles comme seul exemple de « problèmes dont la résolution fait intervenir l'algèbre et la trigonométrie ». Tantôt elles ne sont pas *instructives* : quel intérêt y a-t-il à « étudier des exemples numériques de fonctions définies par

$$y = \sqrt{ax^2 + bx + c} \quad \text{ou} \quad y = \frac{a'x^2 + b'x + c'}{ax^2 + bx + c},$$

si l'on n'en profite pas pour expliquer ce que sont une direction asymptotique, une asymptote, comment on les cherche, comment on reconnaît un élément de symétrie, comment on étudie une fraction rationnelle pour les grandes valeurs de x , voire ce qu'est une décomposition en éléments simples ? On pourrait aussi conclure une telle leçon en montrant que les exemples choisis ont couvert tous les cas possibles.

Souvent, enfin, les exemples tombent à côté ou sont artificiellement compliqués ; à ce point de vue, le type de ce qu'il faut éviter nous a été donné dans « exemples de constructions et lieux géométriques dont la recherche est facilitée par l'inversion » : A étant commun à deux cercles fixes C et C', une première sécante variable autour de A coupe C en M et C' en M', une seconde sécante variable autour de A coupe C en N et C' en N' ; lieu du point commun, autre que A, des cercles MAN' et NAM'. Comme exemple de lieu, ce problème était mal choisi parce que le point variable dépend *a priori* de deux paramètres, et il n'aurait eu sa place, à la rigueur, que dans une leçon intitulée « exemples de propriétés transformées, par inversion, en propriétés nouvelles ».

Le texte proposé suggérerait, d'ailleurs, que l'inversion sert moins à faire effectivement une construction, qu'à reconnaître si elle est possible ou discuter le nombre de solutions : c'est ainsi qu'une inversion de pôle A n'est nullement indiquée pour construire les cercles passant par A et B et tangents à un cercle donné, mais donne rapidement le nombre de solutions ; à ce propos, contrairement à ce qu'a dit le candidat, on discute facilement la position relative de deux cercles transformés par inversion de deux cercles donnés. Notons encore, au sujet d'une autre leçon, que les résultats d'une discussion doivent, autant que possible, être énoncés en fonction des données.

Terminons par quelques remarques relatives aux leçons sur les transformations ponctuelles : d'abord, l'étude d'une transformation doit comporter la recherche des transformées des figures connues, sans quoi la transformation est inutilisable. Puis, lorsque la transformation est définie sur tout le plan ou tout l'espace, pourquoi la restreindre à une figure ? Cette restriction peut lui faire perdre ses propriétés caractéristiques : ainsi, la symétrie dans l'espace par rapport à un point, restreinte à un plan, se confond avec un déplacement ; on nous a dit, d'autre part, que toute correspondance dans le plan entre deux figures F et F', où deux couples quelconques de points homologues sont cocycliques, était une inversion ou une symétrie, énoncé manifestement faux si F et F' sont une même circonférence. On nous a dit aussi qu'une sphère et sa symétrique par rapport à un point sont superposables : est-ce point par point ou globalement ? Rappelons enfin qu'on peut définir un déplacement direct dans l'espace, soit comme produit d'une rotation et d'une translation quelconques, soit comme transformation ponctuelle, définie sur tout l'espace, conservant la distance de deux points quelconques et le sens d'un trièdre donné.

b) Leçons de Mathématiques Spéciales. Rapporteur : M. RICHE

Le programme de 1956 et les commentaires qui l'accompagnent ont entraîné des modifications importantes dans l'enseignement des Mathématiques Spéciales. Le fait que, dans ce programme, l'algèbre et l'analyse occupent une place prépondérante n'autorise pas à considérer comme négligeables les paragraphes consacrés à la géométrie. Celle-ci bénéficie toujours des progrès accomplis dans le domaine de l'algèbre et de l'analyse et les exposés qui la concernent doivent être modifiés en conséquence. Enfin signalons à l'attention de trop de candidats qui l'ignorent, la distinction qu'il convient d'établir entre propriétés projectives, affines et métriques.

Dans la présentation des remarques qui suivent, nous avons respecté l'ordre du

programme et nous nous sommes efforcés de ne pas répéter des conseils ou des critiques qui ont fait l'objet de rapports antérieurs. Notamment, en ce qui concerne l'intégrale définie et les séries, nous prions le lecteur de se référer aux commentaires qui figurent dans le rapport de 1956.

Algèbre linéaire. — Une première leçon sur les espaces vectoriels a été fatale à un candidat qui n'a pas su définir correctement un tel espace et encore moins sa dimension. Un autre candidat l'a présentée de façon satisfaisante. La notion de « somme directe » peut ne pas figurer dans une « première leçon ». En revanche, il convient de présenter, avec beaucoup de soin, les notions de sous-espace, de base et de dimension, ainsi que le théorème, dit de la base incomplète, appelé à jouer un rôle important dans la traduction des conditions de dépendance et d'indépendance.

L'une des deux leçons relatives aux systèmes d'équations linéaires a été construite à partir d'un théorème faux : « Si des vecteurs sont indépendants, leurs projections constituent un système de vecteurs indépendants. »

Les formes linéaires, applications de E_n dans k , peuvent, elles-mêmes, être organisées en espace vectoriel de même dimension. Le candidat qui a bien mis ce résultat en évidence n'a pas su mettre en relief ses principales conséquences : condition d'indépendance et formation des relations de dépendance d'où découle naturellement le théorème de Rouché relatif aux équations linéaires.

— La définition d'un déterminant par récurrence — définition qui consiste à utiliser d'emblée le développement de ce déterminant par rapport à l'une de ses rangées — conduit à des démonstrations parfois délicates. Le candidat qui l'a adoptée n'a pas toujours bien récité la leçon qu'il venait d'apprendre dans un ouvrage récent.

— Deux exposés sur les vecteurs et valeurs propres ont valu à leurs auteurs d'excellentes notes. En revanche, une leçon sur les directions principales des surfaces du second ordre n'a pas été présentée avec toute la clarté désirable.

Fonctions d'une variable réelle. — La démonstration relative à la continuité uniforme d'une fonction continue sur un segment nécessite beaucoup de soin et d'attention. Le jury, condamné, cette année encore, au mutisme, s'est efforcé de distinguer, parmi les fautes commises, les fautes purement matérielles, de celles qui relèvent de conceptions superficielles ou erronées.

— Rappelons que, pratiquement, le développement limité de $f[u(x)]$ (hypothèses habituelles) s'obtient en formant préalablement les développements limités de $u(x)$, $[u(x)]^2$, ..., $[u(x)]^n$, ceux-ci étant formés de proche en proche.

— L'étude des « formes indéterminées » a été fort mal traitée par deux candidats à qui la notion de limite, sous sa forme rigoureuse, n'est pas encore familière.

L'un d'eux, pour obtenir la limite, quand x tend vers zéro, de $\frac{\sin x}{shx}$ utilise la règle de l'Hospital. L'importance qu'il accorde à cette règle le conduit à l'étendre au cas $\frac{\infty}{\infty}$ par des procédés audacieux, mais d'une correction douteuse :

$$\lim \frac{f}{g} = \lim \frac{\frac{1}{\frac{1}{f}}}{\frac{1}{\frac{1}{g}}} = \lim \frac{\frac{1}{\frac{1}{f}}}{\frac{1}{\frac{1}{g}}} = \lim \frac{\frac{1}{f}}{\frac{1}{g}} = \lim \frac{f'}{g'} \cdot \lim \frac{f^2}{g^2} \Rightarrow 1 = \lim \frac{f'}{f''} \cdot \lim \frac{f}{g}$$

— L'étude du symbole $\int_a^b f(x)dx$, lorsque la fonction f n'est pas continue en une borne, n'a d'intérêt que lorsque l'on ne dispose pas de primitive (de forme « élémentaire ») de cette fonction. Le cas où $f(x)$ a pour limite $+\infty$ (ou $-\infty$), quand x tend vers a (ou b), doit évidemment retenir l'attention, mais il est intéressant d'étudier, sur des exemples, le cas où $f(x)$ n'a pas de limite.

Fonctions de plusieurs variables réelles. — Un élève n'aurait pas tiré grand profit de cette première leçon sur les fonctions de plusieurs variables, dans laquelle, après une définition incomplète de la distance, les notions de limite et de continuité sont restées très obscures.

— Deux candidats ont eu à exposer la notion de différentielle totale d'une fonction de plusieurs variables. Le premier a exposé la théorie des fonctions différentiables. Le second a présenté la différentielle formelle ; si l'on adopte ce dernier point de vue, il faut insister sur le fait qu'il s'agit d'une simple notation, commode mais non indispensable, qui se prête aisément au calcul de dérivées partielles.

— L'étude de la forme d'une surface au voisinage d'un point est délicate. Il ne suffit pas d'écrire : $f(x, y) = \varphi^2 \varphi_2 (\cos \theta, \sin \theta) + \varphi^2 \varepsilon(x, y)$, avec

$$x = \varphi \cos \theta, y = \varphi \sin \theta \text{ et } \varphi_2(x, y) = rx^2 + 2sxy + ty^2,$$

pour affirmer, lorsque $r > 0$ et $rt - s^2 > 0$, que la surface est « localement » au-dessus du plan tangent. Il faut préciser que le minimum de $\varphi_2 (\cos \theta, \sin \theta)$, effectivement atteint est positif.

Séries. — Il est regrettable qu'un candidat ait utilisé de façon systématique le rapport $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ pour établir l'égalité des rayons de convergence de la série entière de terme général $a_n x^n$ et de sa série dérivée.

Pour obtenir le développement en série d'une fraction rationnelle, il est souvent commode d'utiliser la décomposition de cette fraction en éléments simples. Rappelons que le rayon de convergence du développement est égal au module des pôles de plus petit module.

Equations différentielles. — Dans une première leçon sur les équations différentielles du premier ordre, il faut se garder de considérations trop théoriques qui laissent indifférent l'élève de Spéciales auxquels les théorèmes d'existence sont inaccessibles. Un candidat a déduit, de considérations générales relatives à l'enveloppe des courbes intégrales de l'équation $f(x, y, y') = 0$, que, s'il s'agit d'une équation $y' = g(x, y)$, cette enveloppe n'existe pas ! Comment expliquer, alors, que les courbes intégrales de $y' = 3y^{2/3}$ sont tangentes à ox ?

Dans une leçon où doivent figurer des exemples, il peut être intéressant de signaler l'existence de singularités ; à propos de l'équation $xy' + y = \cos x$, affirmer qu'il ne passe aucune courbe intégrale par un point de oy distinct du point $(0, 1)$ mérite quelques précisions.

Rappelons qu'il est maladroit d'utiliser la méthode de variation des constantes pour intégrer l'équation $ay'' + by' + cy = \Sigma e^{\alpha x} P(x)$ (où a, b, c, α sont des constantes et P un polynôme). Cette méthode conduit au calcul d'intégrales du type $\int e^{\beta x} Q(x) dx$ que l'on calculerait, pratiquement, par la méthode des coefficients indéterminés.

Géométrie analytique. — Les leçons de géométrie analytique ont été généralement médiocres. Les nombreuses défaillances que nous avons enregistrées nous portent à croire que trop de candidats négligent délibérément cette partie du programme.

Au cours d'une leçon sur les surfaces de révolution le mot « élimination » n'a jamais été prononcé ! L'auteur de cette leçon n'a su présenter que des exemples sans grand intérêt, dans lesquels l'axe de révolution était toujours oz .

Géométrie infinitésimale. — Dans une leçon relative aux fonctions vectorielles d'une variable, il convient de distinguer propriétés affines et propriétés métriques : il n'est pas indiqué de donner d'emblée, de la limite, une définition métrique.

Les leçons relatives aux constructions de courbes, en coordonnées polaires, sont trop souvent l'occasion de fâcheuses négligences dans le domaine de l'analyse. Après avoir commis la maladresse qui consiste à utiliser la dérivée pour étudier les varia-

tions de $\varphi = \frac{\sin 3\theta}{1 + \cos 3\theta}$, un candidat forme sans méthode le développement limité qui conduit à l'étude d'une branche infinie.

Les droites dites stationnaires d'une famille à un paramètre sont généralement tangentes inflexionnelles de l'enveloppe. Le candidat, qui connaissait ce résultat, en a donné une démonstration complètement fausse.

Mécanique. — La leçon sur le mouvement d'un corps solide n'est satisfaisante que dans la mesure où les définitions des mouvements que l'on se propose d'étudier ont été bien précisées. Ces définitions sont intimement liées à celles que l'on rencontre, en géométrie, dans l'étude des isométries directes.

Les méthodes vectorielles rendent aisées les démonstrations des théorèmes relatifs à la composition des vitesses ou des accélérations. Encore faut-il préciser les repères par rapport auxquels on effectue les dérivations.

Trop souvent les exposés de dynamique sont prétextes à calculs. Les constantes qui résultent de l'intégration des systèmes d'équations différentielles doivent être exprimées en fonction des données (conditions initiales).

L'étude du mouvement d'un point gêné commence nécessairement par celle de la réaction dont on étudie, éventuellement, le travail dans un déplacement virtuel.

Assemblée générale du 22 mars 1959

La séance est ouverte à 8 h 30, sous la présidence de A. HUISMAN, assisté de Mlle FÉLIX et de M. CLUZEL. Les questions à l'ordre du jour sont abordées, dans l'ordre prévu (*Bulletin*).

1. Rapport d'activité, compte rendu financier. — 2 800 cotisations environ sont payées à ce jour, et il reste encore 200 collègues qui persistent à accepter le *Bulletin* sans songer à régler leur cotisation. Sans doute devons-nous, à grand regret, interrompre le service pour ces récalcitrants.

Le rapport d'activité est adopté, ainsi que le compte rendu financier, et des remerciements sont adressés à notre Trésorier, M. NICOLAS.

M. WALUSINSKI fait part de la lettre de M. THOVERT (Lyon), qui donne sa démission de membre du Comité.

MONSIEUR LE PRÉSIDENT,

J'ai le regret de vous donner, par la présente, ma démission de membre du Comité de l'A.P.M.

Cette démission est motivée :

1° Par le fait que les membres de province sont dans l'impossibilité matérielle d'assister aux réunions du Comité. Ils tiennent donc dans cet organisme une place qui pourrait être plus utilement occupée par un membre de Paris ou d'une région voisine de Paris.

2° Par le fait que la présence aux trois réunions annuelles du Comité impose aux membres éloignés une cotisation supplémentaire vraiment excessive. Pour moi, l'aller-retour me coûte 12 000 F, ce qui me ferait une cotisation de 36 000 F.

J'ajoute que, étant au 10^e échelon, je peux supporter cette dépense (et je l'ai fait les années précédentes, lorsque je pouvais assister aux réunions), mais il y a là tout de même une question de principe qu'il faudrait résoudre.

Avec mes meilleurs sentiments.

Georges THOVERT, professeur au Lycée Ampère, Lyon.

Lyon, le 19 mars 1959.

Si notre collègue assistait aux séances du Comité (comme il le faisait précédemment), il aurait à s'imposer une cotisation annuelle supplémentaire de 36 000 F. Cela pose de nouveau la question du remboursement des frais de voyage aux membres provinciaux du Comité, remboursement qui sera envisagé, si l'état de nos ressources le permet.

Incidentement, il est souhaité que les séances de Comité aient lieu le dimanche, et soient précédées d'une réunion du Bureau, qui préparerait minutieusement le travail, et enverrait en temps utile un rapport aux membres du Comité. Ainsi ces derniers pourraient-ils se faire mandater par leurs collègues.

M. MAGNIER pose la question du budget des sections académiques. Elles n'existent guère actuellement, c'est un des soucis constants du Comité. Peut-être pourraient-elles percevoir, localement, un léger supplément de cotisation.

On aborde ensuite la question du fichier, dont il est actuellement impossible d'extraire un sous-ensemble déterminé de collègues (l'administration est d'ailleurs dans la même impossibilité, ce qui est une consolation). Sur proposition de M. MAGNIER, il est décidé de faire appel aux suggestions des collègues au sujet du modèle de fiche à adopter. Par exemple, selon M. BUQUET, fiche qui comporterait le nom, la fonction (lycée, collège...), classes où le collègue enseigne. Eventuellement, M. MAGNIER pourrait fournir fiches et trieuses, et M. EUVRARD remarque qu'il conviendrait que, dans chaque établissement, un collègue se charge de rassembler toutes les fiches dûment remplies.

2. Bulletin. — On souhaite de nouveau qu'il y ait davantage d'articles simples, de pédagogie, fort précieux pour les débutants (THOVERT). Sur proposition de Mlle FÉLIX, il est décidé de revoir toute la collection du *Bulletin*, et d'en faire des extraits intéressants et susceptibles de provoquer de nouveaux articles. Cette charge est confiée à M. ITARD, qui dirigera une rubrique intitulée « Le coin du vieux maniaque ».

3. Le baccalauréat Sciences Expérimentales. — Une discussion longue et animée s'engage, où M. MÉDIONI se fait le chaleureux défenseur de la question de cours, cependant que M. SIROS estime qu'on doit supprimer la question de cours en Première, mais la conserver en Mathématiques Élémentaires. Tandis que Mlle AÏTOFF craint que les élèves n'apprennent plus le cours, si on leur enlève l'occasion de faire valoir leurs connaissances.

En tout cas, il semble qu'il y aura cette année deux questions, indépendantes et obligatoires. Le choix entre plusieurs questions ne semble pas souhaité ; MM. MAGNIER et BUQUET pensent qu'il ne faut pas que le choix soit en lui-même une épreuve, et Mlle AÏTOFF, que les questions doivent être obligatoires, notamment dans le cas où l'oral serait supprimé. M. WALUSINSKI, par contre, fait valoir un avantage du choix : il donne la possibilité d'aborder toutes les questions du programme.

Certains mettent en doute l'utilité de la section Sciences Expérimentales ; elle serait parfois une sorte de dépotoir, et n'offrirait pas de débouché. Par contre, on fait observer qu'à Bordeaux, d'anciens élèves de Sciences Expérimentales obtiennent des succès en M.P.C., et M. WALUSINSKI fait valoir qu'il doit y avoir une section scientifique exigeant moins de Mathématiques que Mathématiques Élémentaires, et qu'il serait opportun, non pas de supprimer la classe de Sciences Expérimentales, mais bien au contraire de la rendre plus scientifique. Enfin, M. DUVAL fait judicieusement observer qu'il ne faut pas oublier les élèves dont les études se terminent avec le baccalauréat.

4. Le baccalauréat. — Le sujet national est généralement critiqué. Il entraîne l'uniformité des problèmes, l'élimination de certaines parties du programme, et oblige toutes les Académies à commencer les épreuves écrites le même jour et à la même heure. On pourrait concevoir des sujets fournis par une Académie et proposés dans une autre.

M. WALUSINSKI fait valoir que le baccalauréat est un examen, et non pas un concours. Il importe peu en somme que les bons aient la même note que les moyens, puisque l'examen n'est pas le commencement d'une carrière, mais doit rester le moyen d'éliminer les insuffisants.

Mlle MASSON fait remarquer, à propos du choix des épreuves écrites, qu'il est difficile de se maintenir strictement dans le programme. Certains énoncés parus dans les derniers *Bulletins* ont été critiqués à ce point de vue, et les auteurs des critiques ont parfois proposé d'autres exemples qui tombaient dans la même erreur.

À propos des inégalités qui seraient inhérentes aux sujets académiques, M. EU-

VRARD estime que la responsabilité essentielle revient aux correcteurs, et non aux auteurs, et qu'il en est de même dans d'autres examens et concours. Il fait remarquer aussi que, d'après les projets de réforme du baccalauréat, les candidats en Mathématiques Élémentaires, qui auront été insuffisants en Mathématiques à l'écrit seront interrogés à l'oral en philosophie, ce qui est pour le moins paradoxal.

M. MAGNIER estime que les programmes sont rédigés de façon trop limitative. Ils devraient laisser plus de liberté, et notamment ne pas exiger une question de cours et un problème. Dans le cas où il y a une question de cours, la Commission d'entente qui précède la correction devrait rester libre de fixer le coefficient affecté à la question de cours.

En définitive, l'Assemblée générale :

- 1) exprime sa préférence pour les sujets académiques ;
- 2) proteste contre la suppression des Mathématiques à l'oral.

5. Les programmes. — Des projets de programme pour les classes scientifiques du second cycle ont été rédigés par la Commission Sirois, et récemment ont été faites des suggestions en ce qui concerne les programmes des classes littéraires. L'Assemblée semble un peu hésitante sur l'introduction des notions de statistique. De toute façon, il conviendrait que cette introduction se fasse sous la forme de travaux pratiques sur documents (tables, graphiques) ; ces travaux devraient fournir occasion de réviser le calcul arithmétique et algébrique, et se faire en liaison avec les autres disciplines, notamment la géographie.

Une question se posera alors : les collègues seront-ils toujours qualifiés, et posséderont-ils la documentation nécessaire ? Mais la difficulté ne paraît pas insurmontable.

Une autre manière de donner aux sections littéraires une physionomie originale, peut-être mieux appropriée à la mentalité des élèves, serait de recourir prudemment à l'histoire des Mathématiques, en évitant surtout l'érudition inutile. M. ITARD intervient dans la discussion, et nous donnons intégralement sa communication à l'Assemblée générale :

*L'enseignement de l'histoire des Mathématiques
dans les classes du second cycle à vocation littéraire*

But : montrer aux élèves que les sciences mathématiques sont l'œuvre d'hommes vivant en société et qu'elles ont donc un aspect humaniste et un aspect social.

Moyens : se refuser à tout enseignement dogmatique, en particulier à l'exposition complète d'un déroulement historique, exposé, et pour cause, *a posteriori*.

Choisir des thèmes simples, bien connus des élèves dans leur présentation actuelle, familiers au maître dans leur déroulement historique :

numération,
extraction de la racine carrée,
calcul élémentaire de π ,
résolution d'équations ou de systèmes d'équations du 1^{er} degré,
équation du second degré,
théorème dit de Pythagore,
volume de la pyramide,
fonctions trigonométriques, etc., etc...

Un ou deux de ces thèmes suffisent amplement pour une année scolaire.

On trouvera, pour le maître, une première documentation dans l'*Histoire gén-*

rale des Sciences, t. I et II, ou dans *Mathématiques et Mathématiciens*, à paraître, aux dernières nouvelles, en septembre 1959.

Une collaboration est possible et souhaitable avec le professeur de grec ou de latin, ou de français. Une expérience partielle a été faite au Lycée Henri-IV.

L'outillage dont dispose le professeur est, en langue française, actuellement très réduit.

Signalons, dans les pays voisins, l'ouvrage de E.-M. BRUINS, *Fontes matheseos*, qui contient surtout des textes élémentaires grecs, dont le commentaire est malheureusement pour nous en néerlandais. C'est cet ouvrage qui a servi à l'expérience partielle du Lycée Henri-IV.

Pour conclure, citons un vœu de Paul TANNERY, qui date de 1900 :

« Prendre, par exemple, le programme des Lycées pour l'arithmétique, et faire, à part. et successivement, l'histoire de chaque question : numération parlée, numération écrite, calcul des quatre règles, etc... ; suivre l'évolution de la pratique et de la théorie, jusqu'à leur forme présente, voilà un plan dont l'exécution devrait, ce me semble, tenter un travailleur ; il répondrait à une idée claire, et aboutirait à un enseignement méthodique dont l'utilité ne serait pas négligeable, même au point de vue strictement mathématique. »

Signalons que cet effort a été heureusement poursuivi, pour la numération, par Mlle G. GUTTEL, au grand profit de ses élèves et de ses collègues.

6. Les Grandes Ecoles. — Le rapport de M. CHAZAL est adopté sans discussion. Il est demandé que le *Bulletin* publie des extraits de rapports sur les concours d'admission aux diverses Ecoles.

7. Définitions. Notations. — Le rapport de Mlle FÉLIX est adopté à l'unanimité, et l'Assemblée général met fin à ses travaux à 12 h 30.

Résultats des élections au Comité.

Une Commission a été constituée, qui a dépouillé les bulletins de vote. Les résultats sont les suivants :

245 votants. Sont élus :

MM. WALUSINSKI (223) ; CHAZAL (209) ; LEGRAND (200) ; POITOU (195) ; BIGUENET (191) ; GIRARD (185) ; Mlle MINOIS (127) ; Mme DUBOIS-VIOLETTE (121).

Mlle CLAVIER (120) est déclarée élue en remplacement de M. THOVERT, démissionnaire.

Viennent ensuite : M. DEVIOSSE (105) ; Mlle OZEN (101) ; Mlle BETCH (70) ; M. MALLARD (5) ; MM. CHAUVIN et BERNARD (2).

Ont obtenu une voix : GASTINEL, PINSON, ITARD, MASSON, MAS, GODEFROY, CHAUVINEAU, EDDE, ANDIRAC, FÉLIX, GLAESER, LIMOGÉ, PENNANÉA, REDON, MOREAU, SCHITZINGER.

Réunion du Comité

16 avril 1959

Présents : Mlle BIARD ; MM. CASSÉ, CHAZAL ; Mlle CLAVIER ; M. CLUZEL ; Mlle DIONOT ; Mme DUBOIS-VIOLETTE ; MM. GIRARD, HUISMAN, KLEIN, LEGRAND, LE MÉNAGER ; Mlles MARCHAND, MASSON, MINOIS ; MM. MONJALLON, NICOLAS, REVUZ ; Mlle ROULET ; MM. SCHAEFFER, SIROS ; Mlle VERVAECKE ; M. WALUSINSKI.

1. Election du Bureau. — La séance commence à 16 h 30, sous la présidence de Mlle DIONOT, par l'élection du président, à bulletins secrets selon l'usage.

M. HUISMAN, élu président (1), souhaite la bienvenue aux nouveaux membres du Comité. M. WALUSINSKI, qui considère que son élection est une approbation du programme d'action qu'il a proposé (voir *Bulletin* n° 198), assurera les fonctions de Secrétaire général. Il insiste sur la nécessité de former un Bureau à « direction collective » avec président, vice-présidents, secrétaires, appartenant aux divers ordres d'enseignement ; les vice-présidents assurant les liaisons avec les directions respectives. Le mandat du Bureau est renouvelé ; les tâches des différents membres seront précisées à la prochaine réunion, le mardi 21 avril à 20 h 30.

2. Calendrier des réunions. — M. LE MÉNAGER insiste sur la difficulté pour les provinciaux de se rendre à des réunions le jeudi à 16 h 30. Il est donc décidé qu'un calendrier des réunions sera établi, tenant compte de cette remarque. D'autre part, la tâche du président étant allégée par l'aide que lui apportera le secrétaire général, les convocations pourront être expédiées une quinzaine à l'avance. La première réunion de la prochaine année scolaire est dès maintenant fixée au dimanche 11 octobre à 14 h 30.

3. Réorganisation du secrétariat. — La première tâche du secrétaire général sera de réorganiser le secrétariat. M. NICOLAS, aidé de M. LEGRAND, continuera à s'occuper de la Trésorerie. M. WALUSINSKI propose d'associer au Comité de rédaction, M. CHEVALLIER et M. GENTILHOMME, pouvant fournir un travail sur les publications allemandes et russes respectivement. Le Bureau devra s'occuper d'une relecture de l'organisation des fonctions des rapporteurs.

D'autre part, comme le fait remarquer M. MAGNIER, il faudra étudier les moyens de faciliter une vie locale, fort importante pour l'Association. Il faut que le nombre des régionales augmente, que leur activité s'étende. Toutefois, beaucoup de liberté doit être laissée dans l'organisation de cette vie locale qui devra tenir compte des possibilités et des problèmes de chaque région (problèmes de transport notamment).

4. Journées de l'Ascension. — Le programme est pratiquement établi. La circulaire concernant ces journées va être diffusée. A qui l'adresser ? Comment procéder ? Sur une suggestion de M. CLUZEL, il est convenu que quelques volontaires se réuniront pour faire l'envoi des circulaires aux intéressés.

5. Conférences. — M. REVUZ doit organiser les conférences de l'an prochain qui auront pour sujet : « Rapports entre Physique et Mathématiques ». M. MAGNIER insiste sur l'esprit dans lequel doivent être faites ces conférences qui doivent : fournir au mathématicien des exemples enrichissant son enseignement, mettre en évidence

(1) Résultat du vote : Huisman 20 ; Walusinski 2 ; blanc 1.

la nécessité d'organiser programmes et méthodes des deux disciplines dans un commun accord.

Des contacts seront pris avec l'*Union des Physiciens* pour l'organisation des conférences et l'étude des nouveaux programmes.

Questions diverses. — M. CHAZAL demande si le Comité de l'A.P.M. est habilité à suggérer un plan de vacances. Le Comité répond par l'affirmative, pensant que cette question, comme celle concernant la réforme des épreuves du baccalauréat, peut et doit intéresser l'Association.

Réunion du Bureau

le 21 avril 1959, 20 h 30

Présents : Mlles MASSON, MARCHAND ; MM. CLUZEL, HUISMAN, MONJALLON, NICOLAS, REVUZ, WALUSINSKI.

1. Remaniement de la page intérieure de la couverture du Bulletin. —

Il est convenu de donner une place plus visible aux questions de trésorerie. M. NICOLAS propose un nouveau texte. L'essentiel de ce texte sera reproduit à cette page, les précisions complémentaires seront données au « Bloc-notes de l'A.P.M. ».

Les tâches des membres du Bureau sont réparties (voir couverture) : Le secrétaire général, entre autres choses, devra convoquer aux réunions, s'occuper de la correspondance au sujet du *Bulletin*, préparer avec le président les séances du Comité. Il n'est pas nécessaire d'avoir des rapporteurs désignés pour certains sujets. Quelques rapporteurs sont maintenus : M. CHAZAL pour les Grandes Ecoles, M. ITARD pour l'histoire des Sciences, Mlle FÉLIX pour la définition des mots et les notations mathématiques.

La liste des membres de droit sera révisée. Par exemple pour l'A.P.M. « Association de l'Enseignement Public », les membres des Conseils d'Enseignement de *tous ordres*, qui sont mathématiciens, doivent être membres de droit.

Les précisions concernant les correspondants figureront maintenant au « Bloc-notes de l'A.P.M. », où on trouvera une liste plus actuelle. . et plus longue, des collègues ayant une activité sur le plan local (à partir du numéro d'octobre).

2. Réunions du Bureau. — Il est impossible d'établir trop longtemps à l'avance un calendrier, la fréquence des réunions dépendant des sujets à traiter. Par contre, un jour peut être fixé. C'est le mardi 20 h 30 qui est retenu.

3. Démarches du Bureau auprès des autorités responsables. — Des démarches auprès des différentes Directions sont indispensables pour que celles-ci connaissent notre point de vue sur des questions importantes (heure quotidienne de Mathématiques, travail dirigé, réforme du baccalauréat. etc...) et nous aident dans notre propagande.

4. Les Régionales. — Le Bureau lance un appel pour la formation de Régionales. M. REVUZ, sollicité par Limoges, où il doit parler sur ce sujet, demande quelques précisions sur l'organisation des Régionales. Dans l'Académie de Poitiers, à laquelle appartient Limoges, il y a plusieurs villes importantes et actives, notamment Tours et Limoges. Faut-il suggérer la formation d'une Régionale « Centre-Ouest »

« académique » ou « limousine » ? En raison des difficultés des déplacements, il semble nécessaire, ici, de décentraliser au maximum. Aucune loi rigide ne peut être établie sur ce point.

5. Le Bulletin. — M. HUISMAN énumère les articles qu'il possède pour le prochain *Bulletin*.

6. Journées de l'Ascension. — Le Bureau examine les questions suivantes : possibilité d'enregistrer les conférences au magnétophone, présidence des séances, secrétariat des Journées, invitations à adresser.

ENQUÊTE SUR LE BACCALAURÉAT

Un questionnaire.

Le Comité de l'A.P.M. avait demandé à une Sous-Commission « ad hoc » d'étudier en général le problème des examens et celui du baccalauréat en particulier. Cette Commission a établi un questionnaire que nous présentons ci-dessous. Elle souhaite recueillir de nombreux avis en fonction desquels elle préparera un rapport qui sera publié dans le *Bulletin* avant que l'Assemblée générale ne prenne position sur ces problèmes délicats. Adressez vos réponses au Secrétaire général de l'A.P.M.

I — On peut envisager :

a) un examen commun à tous les candidats, quelle que soit leur origine, selon la formule actuelle ;

b) un examen intérieur à chaque établissement, devant un jury formé des professeurs de l'établissement et de membres extérieurs.

II — Le baccalauréat doit-il se passer en une seule ou en deux parties ? (question qui ne prend toute son importance que dans le cas du maintien de l'examen externe) ;

b) dans le cas de l'examen unique, cet examen doit-il se placer à la fin de la Première, ou à la fin de l'année suivante ?

III — L'examen doit-il comporter chaque année une seule, ou deux sessions ?

IV — L'examen doit-il comporter :

a) un écrit et un oral pour tous ;

b) un écrit seulement, pour les candidats qui atteignent ou dépassent une moyenne donnée (12 ou 11 ou 10 ?), écrit suivi d'un oral pour ceux qui, n'ayant pas atteint la moyenne précédente, ont cependant dépassé une autre moyenne fixée, par exemple : entre 10 et 12 ; entre 10 et 11 ; entre 8 et 10.

V — Faut-il prévoir une épreuve écrite de rappel pour ceux dont la moyenne n'atteint pas la valeur fixée, suivie d'une épreuve orale comme dans le cas précédent ?

VI — Les sujets doivent-ils être nationaux ou académiques ?

VII — Nature de l'épreuve écrite de Mathématiques :

a) formule actuelle avec question de cours ;

b) suppression de la question de cours ;

c) trois questions indépendantes, toutes obligatoires ;

d) trois questions indépendantes, à choisir entre cinq ;

e) durée de l'épreuve : *statu quo* ; ou réduction de la durée avec réduction de la longueur et de la difficulté des problèmes ou questions.

L'épreuve de la 2^e partie « Sciences Expérimentales ».

Les énoncés présentés dans les numéros précédents du Bulletin ont entraîné des réactions diverses. Ils étaient faits pour cela. Voici des remarques qui nous sont adressées par Mme et M. DENISE qui préparent les élèves des deux Ecoles Normales d'Auxerre à cette seconde partie du baccalauréat depuis onze ans.

Nous pensons que l'épreuve doit comporter un minimum de quatre questions indépendantes obligatoires pour éviter l'écueil des questions préliminaires trop difficiles de certains problèmes : le professeur qui compose un sujet doit penser aux candidats qui le traiteront plutôt qu'aux collègues qui en discuteront l'intérêt mathématique.

Il nous semble peu souhaitable d'offrir aux candidats le choix entre un certain nombre de questions : ce choix est en effet plus difficile pour des exercices que pour des questions de cours et la composition de questions de même importance sera parfois malaisée.

Nous sommes résolument opposés à toute extension du programme : il faut pouvoir consacrer l'essentiel de l'horaire aux résolutions d'exercices comme l'imposent les instructions et comme l'exige la préparation d'une épreuve écrite sans question de cours. Aussi mettons-nous en garde nos collègues contre une interprétation abusive du programme. A titre indicatif, voici une liste de questions traitées dans certains cours et manuels, posées par suite à l'oral de l'examen comme nous l'avons souvent constaté et qui sont en dehors du programme ; certaines nous semblent intéressantes et nous les exposons à nos élèves, mais aucune de ces connaissances ne doit être exigée des candidats qui peuvent évidemment les utiliser s'ils les possèdent.

— En arithmétique : systèmes de numération, permutations, arrangements.

— En cosmographie : coordonnées horizontales, équatoriales et géographiques (arrêté du 23 novembre 1956).

— En trigonométrie : formules de transformation d'une somme en produit, expressions des fonctions circulaires de a en fonction de $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$, résolution des équations trigonométriques, relation $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.

— En algèbre : notion de continuité, fonction de fonction, calcul des volumes par les primitives, logarithme de base a et a^x , dérivées d'une racine et d'une exponentielle.

Les indications qui précèdent résultent de la lecture des instructions détaillées qui accompagnent le programme et des entretiens que nous avons eus avec plusieurs Inspecteurs généraux. Nous pensons que le *Bulletin* de l'A.P.M. doit mettre formellement en garde les professeurs qui ignorent les limites du programme (leur ensemble n'est pas vide) contre le préjudice qu'ils peuvent involontairement causer aux candidats.

Voici enfin un sujet-type d'examen qui nous semble pouvoir être traité en deux heures par un élève connaissant bien son cours et travaillant assez vite.

1) On rappelle la définition de la latitude d'un lieu : angle de l'axe du monde et du plan horizontal de ce lieu. A son coucher, qui a lieu exactement au nord-ouest, l'angle horaire de l'étoile est 8 heures. Représentez en perspective la trajectoire de cette étoile sur la sphère céleste locale et déterminez la latitude du lieu en évaluant le sinus de cet angle.

2. Un cercle orienté a 24 cm de longueur. Soit A l'origine choisie sur ce cercle. Un point M se déplace sur ce cercle. L'équation horaire de son mouvement est : $\widehat{AM} = s = v^2 + t$, s est mesuré en cm, t en secondes.

Tracer exactement la trajectoire et marquer les positions de M aux instants de dates : 0, 1, 2 et 3. Construire les vecteurs de vitesse de M à ces différents instants (on représentera 1 cm/s par un segment de 1 cm). Construire un hodographe du mouvement pour $0 \leq t \leq 3$: on construira exactement les points correspondants aux instants de dates 0, 1, 2 et 3 et on tracera approximativement la courbe.

3) Les angles d'un triangle vérifient la relation $2 \operatorname{tg} A = \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C$. En déduire la relation $\operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C = 3$.

On suppose de plus $\operatorname{tg} A = 2$: déterminer les trois angles du triangle.

4) Etudier et représenter graphiquement les variations de la fonction

$$y = x - 3 + \frac{4}{x^2}.$$

Tracer, par rapport aux mêmes axes, la droite d'équation $y = x - 3$ et étudier sa position par rapport à la courbe.

A la suite, voici un sujet proposé par M. BEAUMURGUIA, et d'autres proposés par Mme ATTUYT (Lycée H.-Boucher).

SUJET PROPOSÉ PAR M. BEAUMURGUIA (Lycée St-Gandens)

Quatre exercices obligatoires.

1. Calculer la dérivée de la fonction $y = x - 2 + \frac{4}{x+3}$. Etudier la variation et construire la courbe représentative.

2. L'arc x étant compris entre -90° et $+90^\circ$, calculer en degré, minute et seconde l'arc x défini par $\operatorname{tg}(3x - 107^\circ) = -6,5112$ (on pourra utiliser, soit les tables de valeurs naturelles, soit les tables de logarithmes).

3. Calculer par logarithme le nombre

$$\frac{6,028 \times (11,502)^2}{\sqrt[3]{0,7587}}.$$

4. La fusée Pionnier IV, devenue satellite du Soleil, décrit autour du Soleil une orbite dont le demi-grand axe est de 158 290 000 km. Sachant que le demi-grand axe de l'orbite décrite par la Terre en un an est de 149 000 000 km, calculer en jours la durée d'une révolution sidérale de Pionnier IV.

QUELQUES EXERCICES POUR LA CLASSE DE SCIENCES EXPÉRIMENTALES

I. Une automobile aborde un tournant en forme d'arc de cercle de 400 m de rayon avec une vitesse de 72 km à l'heure. En prenant comme unités respectives de longueur et de temps le mètre et la seconde, quelle est, pendant que l'automobile décrit le tournant d'un mouvement uniforme, son accélération.

Au sortir du tournant, qui se raccorde à une route rectiligne, le chauffeur aperçoit un obstacle et ralentit de façon à s'arrêter après avoir décrit 80 m d'un mouvement uniformément retardé. Quelle est l'accélération de la voiture pendant cette dernière période ?

II. Mettre sous la forme d'un produit de facteurs $1 + \cos x + \sin x$.

III. Montrer que pour qu'un triangle soit rectangle en A, il faut et il suffit que $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C$.

IV. Montrer que si trois nombres x, y, z sont en progression géométrique, ils vérifient la relation $(x + y + z)(x + z - y) = x^2 + y^2 + z^2$.

Application : Trouver trois nombres en progression géométrique connaissant leur somme 21 et la somme de leurs carrés 189.

V. Résoudre graphiquement l'équation $x^3 - 3x + 4 = 0$.

VI. Tracer la courbe $y = e^x$, puis résoudre graphiquement l'équation $e^x = -2x + 4$.

VII. Calculer, au moyen des tables de logarithmes, $T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$
pour $l = 1,23 \text{ m}$ $g = 9,809$.

Mme ATTUYT (H.-Boucher).

Programmes et examens.

Que les sujets d'examen soient strictement conformes aux programmes, n'en dépassent pas les limites, il y a là une nécessité qui a été soulignée par de nombreux Collègues.

M. POUJOIS (Reims) nous écrit : « ...Mais à part la tête et la queue de la classe, il y a toujours une *masse* de braves garçons, pas bien forts, mais travailleurs, qui passent un temps **énorme** à *encaisser* le cours, les corrigés des exercices, etc... C'est à ceux-là que je voudrais pouvoir dire avec certitude : Vous n'avez aucune chance d'avoir un problème portant sur telle question. Si vous voulez, je voudrais pouvoir orienter les bonnes volontés dans le sens le plus favorable, tout en évitant de bachoter. »

Questions séparées ou problèmes.

Notre Collègue A. PLUSSIBÉ (Lycée Clairaut) nous écrit :

Les propositions qui ont été faites concernant les épreuves de Mathématiques au baccalauréat ne semblent pas avoir contenté tout le monde. En particulier, remplacer le problème unique et la question de cours par des questions séparées, même dans la section Mathématiques Élémentaires, a paru presque sacrilège. Ce serait faire entrer le baccalauréat en déchéance que d'éviter aux candidats le coup de dé que représente parfois un problème unique.

Le hasard d'une lecture m'a fait lire les énoncés de l'agrégation de l'Enseignement Secondaire des jeunes filles (concours de 1906 et 1907), dans le tome I de la glorieuse *Revue de l'Enseignement des Sciences*. La formule est la même pour les deux années. Je crois qu'il sera intéressant pour tous nos Collègues de connaître l'énoncé complet.

Arithmétique et algèbre.

I. — Déterminer la période d'une fraction décimale périodique simple sachant que cette période a trois chiffres et que la fraction ordinaire génératrice est égale au cube d'une fraction.

II. — Étant donné le trinôme (1) $x^2 + px + q = 0$ dont les racines sont x' et x'' , former un second trinôme (2) $y^2 + Py + Q = 0$, dont les racines y' et y'' soient les carrés des racines du premier, $y' = x'^2$ $y'' = x''^2$.

Trouver les conditions que doivent remplir les coefficients p et q

1° pour que le trinôme 2 ait ses racines égales ;

2° pour que le trinôme 2 ait les mêmes racines que le trinôme 1 ;

3° pour que les deux trinômes aient une racine commune.

III. — Etudier la variation de la fonction $y = \sqrt{(x-a)(x-b)}$ où a et b désignent deux constantes données et en supposant a inférieur à b . On discutera les divers cas possibles et on représentera la variation par une courbe.

Géométrie.

I. — Les longueurs a, b, c des côtés d'un triangle, évaluées en mètres forment une progression arithmétique de raison l , et le rayon du cercle exinscrit correspondant au plus grand côté est égal au côté moyen. Calculer les côtés, la surface, les rayons des cercles inscrit, exinscrits et circonscrit.

II. — On considère les courbes qui, rapportées à deux axes rectangulaires Ox, Oy , ont pour équation

$$(1) \quad x^2 + y^2 - 2mxy = l - m^3$$

où m désigne une constante.

1° Construire les courbes représentées par cette équation et discuter leur forme et leur nature suivant les diverses valeurs de m .

2° Déterminer m de façon que la courbe représentée par l'équation 1 passe par un point donné P de coordonnées x, y ; discuter le problème suivant les diverses positions du point P .

3° Déterminer m de façon que la courbe (1) soit tangente à une droite donnée $ax + by + c = 0$.

III. Etant donné un triangle ABC , déterminer un point O de l'espace, de façon que le trièdre $OABC$ soit trirectangle. Quelle doit être la forme du triangle ABC pour que le problème soit possible ?

**

Sans doute sera-t-on d'abord frappé par le changement de niveau du concours. Il me paraît pourtant digne de remarque qu'une formule d'épreuve qui avait été jugée satisfaisante pour le recrutement de professeurs qualifiés ne doit pas être si mauvaise qu'on l'a dit pour le baccalauréat.

L'objection formulée à plusieurs reprises contre les exercices au choix est plus sérieuse. Il est évident que là où il y a choix, il y a risque (ainsi, il faut le dire que dans toutes les circonstances de la vie). On pourrait limiter cette intervention du choix en ne donnant qu'une question de plus que le nombre de questions à faire ; il serait entendu que traiter partiellement en plus une question ne serait pas noté (ceci pour éviter le travail superficiel). Par contre, cette question à éliminer serait pour le candidat une assurance contre le trou de mémoire éventuel.

A. PLUSSIBÉ.

DÉFINITION DE MOTS ET NOTATIONS

Les articles publiés dans le *Bulletin* de mars ont entraîné certaines réponses. Voici celles de nos Collègues CHEVALLIER (*Marcellin-Berthelot*), THOVERT (Lyon, *Ampère*) et EHRHART (Strasbourg) :

1. « Le plaider pour les nombres « réels » ne m'a pas tout à fait convaincu. Les expressions « réel » et « imaginaire » sont déjà assez malheureuses au niveau des gens avertis ; expliquer aux gosses de Quatrième en quoi ces nombres-là sont réels ne m'enthousiasme pas. On peut plaider l'usage et c'est un puissant maître. Mais il existe un autre usage, non moins justifié : c'est le terme *scalaire*, lié à l'échelle des nombres « relatifs », et la *mesure scalaire* d'un vecteur est d'une excellente langue. Du même coup, le produit du même nom serait démystifié. »

J.-M. CH.

2. « Parfaitement d'accord avec l'article de la page 232 du dernier *Bulletin* (mars 1959). Il y a longtemps que j'emploie « factoriser », et même dans le premier cycle.

L'expression « rapport de section » me paraît heureuse. Lorsque A et B sont donnés dans cet ordre, il faut prendre pour rapport de section

$$k = \frac{\overline{MB}}{\overline{MA}}. \quad k \in \mathbb{R}.$$

Il y a aussi longtemps que j'oppose les « nombres absolus » aux « nombres relatifs » et je parle aussi de « nombres réels ». (Je bannis absolument nombres algébriques). Toutefois, l'adjectif « relatif » a certains inconvénients, et je pencherais pour « *nombres orientés* ».

D'accord aussi pour bannir « mesure algébrique » (ou mesure relative). La mesure d'un vecteur ne peut être qu'un nombre relatif, pas un nombre absolu.

Il ne me paraît pas opportun d'utiliser les quantificateurs $\forall$ et $\exists$. En revanche j'utilise $\Leftarrow$ et $\Rightarrow$ ou $\Leftrightarrow$.

Malgré son emploi dans les langues anglo-saxonnes, le mot « congruent » ne me paraît pas heureux pour remplacer le mot égal en géométrie. Il est bien suffisant de l'employer en trigo et en arithmétique pour les égalités à module.

J'ai introduit discrètement les « classes d'équivalence » relativement à certaines relations (en mettant en relief les trois propriétés de définition : réflexivité, symétrie et transitivité). Au point de vue vocabulaire, avec le mot « représentant », cela donne des mises au point qui peuvent être profitables pour les élèves :

<i>Classes d'équivalences</i>	<i>Représentants</i>
Longueur	Segment AB
Vecteur	Segment orienté $\overrightarrow{AB}$
Direction	Droite X
Nombre rationnel etc., etc...	Fraction $\frac{3}{5}$

THOVERT

3 Nombres signés ?

Tout le monde est à présent d'accord pour réserver la dénomination « nombre algébrique » aux zéros des polynômes à coefficients entiers. Pour qualifier les nom-

bres formés d'une valeur absolue et d'un signe (le zéro est adjoint à toute classe de nombres) plusieurs adjectifs ont été proposés : réels, relatifs, orientés, qualifiés, indiens.

« Réel » n'évoque nullement l'idée de sens ou sa traduction, le signe. A mon avis, on ne devrait l'introduire qu'au moment où l'on définit le nombre complexe. Le nombre réel et le nombre complexe sont aussi réels et aussi abstraits l'un que l'autre, mais un point n'existe *réellement* que si ses coordonnées sont réelles. Nous voilà loin du domaine de compréhension de l'élève de Quatrième, qui trouve curieux que pour rendre un nombre réel, il faut lui accoler un signe.

« Relatif » ? MM. SCHAEFFER, DUPIN et WALUSINSKI ont bien montré combien ce mot est délavé et ambigu par ses usages multiples. On lui reproche aussi sa longueur de trois syllabes.

N'est-ce pas naturel, simple et clair — particulièrement pour le débutant — d'appeler nombres signés les nombres qui ont un signe ?

On dirait naturellement *entier signé* au lieu de « entier relatif ». *Mesure signée* d'une grandeur orientée est aussi commode que « mesure relative » ou « mesure algébrique » et c'est plus clair. Que signifie signé aussi dans le langage courant « marqué de son nom » n'est pas un inconvénient : cela est un sens dérivé, tandis que « marqué d'un signe » est le sens original ; d'ailleurs toute confusion est exclue.

E. EHRHART (Strasbourg)

SUR UNE QUESTION DE NOTATION (Structure d'ordre)

I. Dans leur rapport sur l'examen oral de Mathématiques (1^{er} degré) de l'Ecole Polytechnique en 1958, les examinateurs rappellent que « x inférieur à y s'écrit $x \leq y$ et non $x < y$ ». En s'exprimant ainsi, ils recommandent la notation adoptée par N. Bourbaki dès 1939 (*Théorie des ensembles*, fascicule de résultats, p. 34 de la 1^{re} édition).

Sur le sens des relations notées :

(A) $x \leq y$ (B) $x < y$

tous les mathématiciens sont d'accord ; mais elles peuvent être énoncées :

(C) x est inférieur ou égal à y ;

(D) x est inférieur à y ;

(E) x est strictement inférieur à y .

La petite difficulté de langage est que, pour les uns, (D) signifie (A), et, pour les autres, signifie (B). Les professeurs se sont déjà trouvés en présence d'une difficulté analogue, il y a une quarantaine d'années, lorsque les vecteurs libres sont entrés dans l'enseignement. Le produit scalaire était alors noté, tantôt $\vec{V} \cdot \vec{V}'$, tantôt $(\vec{V}, \vec{V}')$, tantôt $\vec{V} \times \vec{V}'$; mais le produit vectoriel était noté, soit :

$\vec{V} \wedge \vec{V}'$ soit $[\vec{V}, \vec{V}']$, soit aussi $\vec{V} \times \vec{V}'$ et pour éviter toute confusion, il a fallu s'interdire le dernier signe.

La terminologie de Bourbaki a pour conséquence que toute locution se rapportant à l'inégalité doit être prise au sens large :

Dire que x est positif, c'est dire $x \geq 0$.

Dire que $f(x)$ est croissante, c'est dire $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0$, etc...

Elle a des avantages ; elle est suivie, non seulement par les mathématiciens de l'équipe Bourbaki, mais aussi d'autres auteurs de langue française.

Mais cette terminologie n'est pas en accord avec le sens usuel du mot inférieur dans la langue quotidienne. Elle est nouvelle dans le style mathématique ; pour les auteurs anciens, Picard, Goursat, Lebesgue, Baire, pour d'autres, plus récents, Denjoy, Ostrowski, dire d'un nombre qu'il est positif entraîne qu'il n'est pas nul.

Cette terminologie est contraire aussi à l'usage suivi jusqu'à ce jour dans l'Enseignement du Second Degré. (Voir, par exemple, TANNERY, *Arithmétique*, et BOURLET, *Algèbre*, dans la collection Darboux, chez Colin ; ou le livre de notre collègue CROZES, *Arithmétique*, chez Masson, p. 12).

Elle n'est pas suivie non plus par tous les auteurs modernes. Citons :

VAN DER WAERDEN, *Moderne Algebra* (Springer, 1939), Bdl, p. 9 et p. 218.

CROISOT-Mme DUBREIL-LESIEUR, *Treillis* (Gauthier-Villars, 1953), p. 3.

MILIOUX et PISOT, *Théorie des fonctions* (G.-V., 1953), t. I, p. 3. (Il y est question d'un ε positif, ce qui veut dire strictement positif).

LICHNEROWICZ, *Théorie des connexions* (Dunod, 1956), p. 162.

ZAMANSKY, *Introduction à l'algèbre et à l'analyse modernes* (Dunod, 1958), p. 10 par exemple.

II. Il est d'usage, maintenant, avec Bourbaki, d'appeler relation d'ordre dans un ensemble une relation antisymétrique ($x \leq y$ et $y \leq x$ équivaut à $x = y$) et transitive ($x \leq y$ et $y \leq z$ impliquent $x \leq z$) et de réserver le mot d'ensemble totalement ordonné à un ensemble ordonné dans lequel deux éléments quelconques x et y de l'ensemble étant donnés, ils sont liés par l'une au moins des deux relations $x \leq y$ ou $y \leq x$.

Il est d'usage également de ne plus appeler relation d'ordre la relation stricte $x < y$. Ce que fait pourtant (dans sa première édition du moins) DUBREIL, *Algèbre* (G.-V., 1946). Il faut savoir que de nombreux auteurs, SIERPINSKI, *Nombres transfinis*, G.-V., 1928), DENJOY dans ses importants travaux sur l'énumération transfinie ont entendu, par ensemble ordonné, un ensemble totalement ordonné. Il semble, néanmoins, que sur ce point, l'enseignement peut suivre Bourbaki.

A. MAGNIER (Louis-le-Grand).

Le Bureau s'adresse aux Adhérents...

Si le Bureau reçoit souvent des lettres de Collègues à la recherche d'un renseignement, ou soucieux de telle question de notre ressort, il est plus rare que le Bureau s'adresse à l'ensemble de tous les membres de notre Association. Il ne le fait guère qu'au moment de l'Assemblée générale, demandant alors qu'on le juge.

En ouvrant cette nouvelle rubrique de « La vie de l'A.P.M. », une rubrique que nous voudrions permanente, le Bureau exprime le souhait d'un échange plus actif de services et d'idées entre tous les membres de l'A.P.M. Les effectifs de l'Association ont été régulièrement croissants depuis plusieurs années. A cette force numérique, il faut que corresponde une constitution vigoureuse, une activité de bon aloi, une audace dans l'entreprise qui justifieront un surcroît de prospérité.

1. Questions d'organisation.

L'absence d'un fichier détaillé des membres de l'A.P.M. a été souvent déplorée par le Bureau. Mais quoi, direz-vous, c'est donc que le Bureau ne fait pas son travail ! Nous dirons plutôt qu'il a toujours fait de son mieux, compte tenu des moyens limités dont il disposait.

Moyens financiers limités : la part du budget de l'A.P.M. absorbée par les frais de fonctionnement est minime. L'essentiel de nos ressources a permis l'enrichissement du *Bulletin* et nous persisterons dans cette « politique ». Mais les moyens ont été encore plus limités en temps et en hommes. Un fichier ne s'improvise pas. Nous étudions les meilleurs moyens de le réaliser.

Il ne nous suffit pas d'avoir, ce que nous avons depuis longtemps, les noms et les adresses. C'est indispensable d'avoir cela pour l'expédition du *Bulletin*, ce n'est pas suffisant pour savoir vite à qui s'adresser, dans une ville déterminée au sujet d'une classe déterminée (par exemple).

Nous tenterons de réaliser ce fichier complet au cours de l'exercice 1959-60. Nous pensons avoir double chance de réussir en faisant appel :

— au dévouement des Collègues qui, dans un établissement ou pour un groupe d'établissements d'une même ville, veulent bien collecter les cotisations ;

— à la bonne volonté de tous les adhérents pour que chacun apporte sa pierre à l'édifice commun (cinq minutes par adhérent représente un mois de travail à huit heures par jour).

Des listes toutes préparées seront adressées aux délégués qui nous en feront la demande (envoi durant les premières semaines de la rentrée). Des fiches détaillées précisant les renseignements demandés seront insérées dans les *Bulletins* de septembre et d'octobre. Le travail ira d'autant plus vite que la rentrée des cotisations sera plus rapide.

Cette opération « organisation interne » mettra une fois de plus en évidence tous les avantages de la désignation dans chaque établissement, d'un correspondant de l'A.P.M. Des appels répétés ont été faits à ce sujet. Très souvent la désignation du correspondant a eu lieu. Beaucoup moins souvent, il faut le regretter, cette désignation a été communiquée au Bureau. Cet excès de discrétion est préjudiciable au bon fonctionnement de l'A.P.M.

Sans attendre l'opération fichier, à l'occasion des réunions de fin d'année, que les correspondants se fassent désigner, puis, qu'ils se fassent connaître, en écrivant au secrétaire général.

2. Sections locales, régionales, académiques.

Il ne suffit pas que les correspondants soient désignés. Dans le cadre d'une localité, d'un département ou d'une académie, il est hautement souhaitable que des sections s'organisent. Nos statuts le permettent. Le Bureau se propose même d'étudier comment compléter ces statuts pour que les sections régionales aient une vie, un rôle administratif (et financier) mieux déterminé.

Lors de la dernière Assemblée générale, la question s'est trouvée posée dans une forme aiguë par la démission (du Comité) de notre Collègue THEVERT, son éloignement géographique ne lui permettant pas de participer aux réunions parisiennes du Comité. Il est évident que les membres du Comité, où qu'ils résident, doivent pouvoir assister aux réunions sans frais excessifs (la question des temps perdus en déplacements étant malheureusement sans solution). Un des rôles des sections académiques ne pourrait-il être d'assurer par certains de ses membres la représentation plus étendue des adhérents dans le Comité ? Les réunions de ce dernier seraient préparées par des réunions locales.

En retour, ces sections académiques répercuteraient auprès des sections locales et de tous les adhérents tel appel particulier du Bureau pour une enquête, pour une série d'articles, pour un avis à formuler, etc...

Enfin ces sections, académiques ou locales, auraient évidemment toute liberté d'organiser des réunions d'études, des conférences, des visites, qui augmenteraient le

rayonnement de l'A.P.M. et participeraient par cette voie à l'utile défense de la profession...

Pourquoi, sans attendre les désignations de correspondants d'établissement, ne pas profiter des réunions pour les examens afin de jeter les bases de la constitution de ces sections, là où elles n'existent pas encore. Car il y a des villes où elles existent, des villes où elles se créent ; la preuve est donc faite que leur vie est possible. Il faut tout simplement qu'un collègue dévoué en prenne l'initiative.

3. Des enquêtes, des articles...

Le travail ne manque pas. Si l'enseignement est vivant, et il l'est, il change, il va changer, il doit changer. Or le Bureau n'est pas uniquement composé de génies... (l'auteur de ces lignes prie de ne voir dans cette phrase aucune intention malveillante pour ses Collègues). Les avis des responsables de l'A.P.M. auront d'autant plus de poids qu'ils seront la réunion, et la synthèse, des recherches collectives.

Il faut donc fixer un vaste programme d'enquête. Les circonstances ont choisi pour nous le premier sujet : le baccalauréat et les examens. Sujet voisin de celui qui est proposé par la Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique (C.I.E.M.) pour son Congrès de... 1962 (Etude des différents types d'examens et notamment des examens donnant accès à l'Enseignement Supérieur).

Voici d'autres sujets d'enquêtes proposés par la C.I.E.M. :

— Quelles sont les questions de « Mathématiques modernes » et quelles sont les applications des « Mathématiques modernes » qui peuvent trouver place dans l'Enseignement Secondaire.

— Etude comparée des méthodes d'enseignement employées pour le passage de l'arithmétique à l'algèbre.

— Importance de l'histoire des Mathématiques dans la formation des maîtres (sujet proposé à la C.I.E.M. par le Professeur AKISUKI, de l'Université de Kyoto).

D'autres sujets, d'apparence plus prosaïque, peuvent avoir une aussi grande portée pédagogique :

— Situation, à une certaine date, des moyens matériels d'enseignement : manuels, matériel didactique, installation des locaux, etc...

Chacun de ces sujets pourrait donner lieu, sinon à un numéro spécial du *Bulletin*, tout au moins à une très copieuse rubrique qui pourrait d'ailleurs faire l'objet d'un tirage à part en brochure (par groupement de plusieurs rubriques successives).

L'enquête sur les examens est ouverte. Dès la rentrée, le *Bulletin* fera écho des réponses reçues. Il proposera un plan de réalisation pour les sujets retenus. Faites-nous part, dès maintenant, de vos suggestions.

4. Des séminaires...

Les grandes conférences, organisées en commun par la Société Mathématique et l'A.P.M. ont maintenant une existence « institutionnelle ». En dehors du profit que les Collègues parisiens qui les suivent régulièrement peuvent en tirer, leur publication donne au *Bulletin* une valeur qui a été généralement reconnue.

Le cycle sur *Probabilités et Statistiques* formera, quand les conférences en seront rassemblées, un ouvrage original particulièrement à sa place dans la bibliothèque des professeurs. Le Bureau, et tout spécialement notre Collègue REVUZ, s'occupe dès maintenant du cycle 1959-60 qui portera sur la mécanique et la physique mathématique.

Ceci dit, et ces conférences devant être ce qu'elles sont, on en a parfois critiqué le haut niveau, certains Collègues trop modestes, allant jusqu'à les juger inaccessibles. Même si cette opinion était fondée, il n'en serait que plus intéressant d'organiser, non pas spécialement à Paris, mais partout où le groupement de cinq à dix Collègues serait possible, des réunions régulières d'étude sur tel sujet choisi par les intéressés. Voilà encore une tâche qui sera, spécifiquement, celle des sections locales ou régionales. Sans vouloir limiter le champ des initiatives, mais simplement à titre d'exemples, nous avons proposé : un séminaire sur les probabilités ; un autre sur l'algèbre moderne. Il est possible d'en imaginer sur des sujets pédagogiques : l'utilisation du film en Mathématiques (ne pourrait-on, à ce propos, faire des expériences comparatives, lesquelles n'ont toute leur valeur que si *plusieurs* professeurs y participent). Il existe, à Paris, sous la direction de nos Collègues TATON et ITARD, un séminaire d'histoire des Mathématiques ; il pourrait en exister ailleurs qu'à Paris.

Le travail de ces séminaires locaux trouverait, tôt ou tard, à s'exprimer dans le *Bulletin*, reflet de la vie de l'Association et moyen d'animer cette activité.

Résumons-nous ; pour cette fois, le Bureau propose donc à nos Collègues :

— de penser tout de suite, si ce n'est déjà fait, à la désignation d'un *correspondant d'établissement* qui se fera connaître aussitôt ;

— de profiter des réunions de fin d'année pour constituer, si ce n'est déjà fait, section locale, départementale ou régionale (dont le responsable se fera aussitôt connaître) ;

— de préparer la vie de ces sections régionales en discutant des *enquêtes* les plus urgentes à mener ; de répondre sans plus tarder à celle du baccalauréat ;

— de réunir le groupe de cinq ou dix Collègues qui voudraient, à raison de deux séances par mois (par exemple) mener en commun une étude sur le sujet de leur choix.

Insistons enfin sur l'intérêt pour tous de faire connaître au Bureau toutes les initiatives prises, et faire connaître cela veut dire une lettre, qui peut n'avoir que trois lignes, au secrétaire général.

Le Bureau.

RECOMMANDATIONS IMPORTANTES.

*** Il y a encore quelques anciens adhérents en retard pour le renouvellement des cotisations. Le service du Bulletin leur est suspendu. Qu'ils se hâtent de faire leur versement et le Bulletin leur sera envoyé.**

*** Sur tout versement, bien préciser son affectation. En particulier ne pas omettre : NOM, prénom, adresse ; nom de l'établissement où l'on exerce et nom de l'établissement précédent en cas de changement depuis le versement antérieur.**

*** Nous souhaiterions que les Collègues qui ont l'obligeance de recueillir les cotisations dans leur établissement ou dans leur ville, nous transmettent la liste des noms par ordre alphabétique et avec les renseignements demandés ci-dessus.**

LE TRESORIER.

Le bloc-notes de l'A.P.M.

● **Le traitement numérique des informations.** — Une conférence internationale se réunit à l'Unesco, sur ce sujet, du 15 au 20 juin. Les exposés porteront sur les six chapitres suivants : 1) Méthodes mathématiques du calcul numérique ; 2) Structure logique des machines à calcul numérique ; 3) Langage symbolique commun pour les machines à calcul numérique ; 4) Traduction automatique des langues ; 5) Rassemblement, conservation et recherche d'informations ; 6) Reconnaissance des structures et faculté d'adaptation des machines. Du 13 au 23 juin, une exposition *Auto-Match 59* permettra au grand public d'admirer les grands ensembles électroniques construits en France et dans les autres pays ; à cette occasion, des conférences publiques seront organisées. Souhaitons que le programme précis de ces manifestations soit porté en temps voulu à la connaissance des professeurs de Mathématiques.

● **Les écrits restent... Sur les polyèdres réguliers.** — De l'ouvrage « La Symétrie », par Jacques NICOLLE (Collection Que sais-je ?), à la page 27 : « La sphère, qui est le cas limite d'un polyèdre régulier dont on augmente indéfiniment le nombre des faces, possède une infinité d'axes d'ordre infini (axes d'isotropie)... »

● **A propos du théorème de Bachet.** — Notre collègue DAUTREVAUX (Belfort) nous communique à ce sujet une nouvelle référence : LEGENDRE : « Théorie des nombres », tome I, page 215.

● **Oubli en forme de chapeau.** — Un collègue, à la fin de l'Assemblée générale du 22 mars, est parti avec un chapeau qui n'était pas le sien. Le propriétaire du chapeau (s'il s'est aperçu de la substitution) est prié de se mettre en rapport avec A. HUISMAN, qui lui fera connaître le ravisseur involontaire.

● **Les Journées de l'A.P.M.** — Elles ont eu lieu les 7, 8, 9 mai 1959 et ont connu un grand succès. Affluence de participants attentifs, conférenciers remarquables qui se sont tous aimablement prêtés à des discussions très animées. Le Bureau a maintenant la tâche de rassembler dans une brochure l'ensemble de ces exposés... puis de préparer les journées 1960. Nous en reparlerons bientôt. Succès oblige : 1960, l'année des 3 000 adhérents doit comporter des journées d'études dignes de celles dont nous venons de profiter.

● **Le prix « Maurice Audin » :** Le Comité Audin, et un certain nombre d'universitaires, a décidé d'instituer un prix de fondation MAURICE-AUDIN, d'une valeur de 100 000 F, et qui serait destiné chaque année à un jeune mathématicien de grande valeur, ayant contribué par son travail au progrès des Mathématiques.

Pour cette année le jury est constitué par MM. Jean DELSARTE, Henri CARTAN et Gustave CHOQUET.

L'appel en faveur de cette fondation est signé de MM. Dixmier, Favard, de Possel et L. Schwartz. Bien qu'il ait déjà touché certains Collègues, il nous paraît utile de le répéter ici et de signaler que toute contribution à la constitution du fonds doit être adressée à M. Laurent SCHWARTZ, 37, rue Pierre-Nicolas, Paris, 5^e (C.C.P. Paris, 15017-42).

● **Commission Internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des Mathématiques :** Président : G. CHOQUET ; Vice-Président : J. PIAGET ; Secrétaires : C. GATTEGNO et W. SERVAIS.

XIII^e Rencontre internationale de professeurs de Mathématiques, du 7 au 15 août 1959, à Nyborg et à Aarhus (Danemark).

(Thème : Les Universités et les Ecoles devant leurs responsabilités mutuelles.

Vendredi 7 août : arrivée à Nyborg (Est de l'île de Fionie, côte du Grand Belt). Installation au Nyborg Statsgymnasium. Après-midi : conférences d'ouverture et discussion.

Samedi 8 août : Rapports des diverses délégations. Situation de part et d'autre dans les divers pays. Discussion.

Dimanche 9 août : L'apprentissage mathématique chez l'écolier et l'étudiant. Discussion.

Lundi 10 août : Excursion : départ de Nyborg pour Aarhus. Le soir, installation à l'Université d'Aarhus (côte est du Jutland), la plus moderne des Universités danoises.

Mardi 11 août : Inspiration des programmes aux deux niveaux. Discussion.

Mercredi 12 août : L'harmonisation des enseignements. Discussion.

Jeudi 13 août : Les examens comme stimulant de l'étude. Discussion.

Vendredi 14 août : Résolutions.

Samedi 15 août : Conclusions.

Langues officielles : allemand, anglais, français. Coût du séjour : £ 15, à verser en Couronnes danoises. Les logements ne pourront être réservés que contre paiement d'une provision équivalente à 3 £ à verser à W. SERVAIS, rue des Déportés, 60, Morlanwelz, Hainaut (Belgique), C.C.P. n° 390281.



21, rue de Montsouris
Paris, XIV^e
Tél. : Por. 38-10

REGLES A CALCULS

Longueurs : 12,5 - 25 - 50 cm.

Systèmes : Rietz, Electric Log-Log (Darmstadt améliorée), Rolinéa, Géomètre, Géopolytechnique, Electro.

INSTRUMENTS DE DESSIN

Règles divisées, Echelles de réductions, Equerres, Rap-
porteurs, Pistolets.

RAPPORTEUR-RECTIFICATEUR permettant la division des
angles, le développement du cône, du cylindre, la cons-
truction des courbes cycloïdes, épicycloïdes, etc...

Notices et catalogue sur demande

Chez les

Éditions WESMAEL-CHARLIER

S. A. R. L.

30, rue de Gramont

PARIS - 2^e

Téléph. : Richelieu **54-45**

Vient de paraître :

LE FIL D'ARIANE

ou

VARIATIONS SUR DEUX THEMES :

La fonction linéaire — La fonction exponentielle

par

A. HUISMAN

Professeur au Lycée Montaigne

Vol. relié de 226 pp. - format 23 × 15 cm.

7 ill. hors-texte - 115 figures

Prix de Mathématiques

CONCOURS ANDRE VERA

Prix : **1 950 F**

EN VENTE :

Pour les libraires de Paris et de la Région Parisienne
chez

« **LES HEURES CLAIRES** »

SOCIÉTÉ ANONYME

25, rue Leverrier, PARIS (6^e)

C.C.P. Paris 5318-28

Banque B.N.C.I.

Tél. Odéon 56-51

Magasins ouverts tous les jours de 10 h. à 19 h.

LIBRAIRIE CLASSIQUE EUGÈNE BELIN

8, rue Férou - PARIS VI^e

La classe de mathématiques

par **M. MONGE** et **M. GUINCHAN**

★

PROGRAMMES 1957-1958

1^{er} cycle

Classe de sixième : cartonné 560 F broché 430 F

Prochaine édition : **Nouvelle unité monétaire.**

Classe de cinquième : cartonné 620 F broché 480 F

Prochaine édition : **Nouvelle unité monétaire.**

Classe de quatrième : cartonné 730 F broché 600 F

Classe de troisième : été 1959 Nouvelle unité monétaire.

Cours de mathématiques spéciales

par **G. CASANOVA**

★

I. Nombres. Vecteurs. Algèbre linéaire. .. 900 F

II. Algèbre et analyse. 2000 F

III. Géométrie analytique. 2000 F

En préparation :

IV. Mécanique. Calcul numérique. Géométrie descriptive.

VIENT DE PARAÎTRE

PROBABILITÉS, STATISTIQUE, RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

Collection dirigée par G. DARMOIS, Membre de l'Institut

Section C. — RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

INITIATION AUX PROCESSUS ALEATOIRES

**LE PROCESSUS DE POISSON — FILES D'ATTENTE
PANNES DE MACHINES**

par **M. GIRAULT**

Professeur à l'Institut de Statistique

Maître de conférences à la Faculté des sciences de Caen

120 pages 14 X 22, avec 15 figures. Broché **980 F**

RAPPEL :

SECTION A. — THÉORIE DES PROBABILITÉS. **Ensembles mesurables et probabilités.** XII-94 pages 14 X 22, avec 41 figures. 1958. Broché **850 F**

SECTION B. — STATISTIQUE MATHÉMATIQUE. **Analyse de variance et plans d'expérience.** 84 pages 14 X 22. 1959. Broché **800 F**

En librairie et chez

DUNOD Editeur, 92, Rue Bonaparte, PARIS (6°)

BORDAS

27 bis, rue du Moulin-Vert - PARIS

COLLECTION COSSART ET THERON

MATHÉMATIQUES 6^e

352 pages - très nombreux exercices pratiques

40 planches en noir et couleurs - cartes, etc.

par

L. KRUGER

Professeur au Lycée Chaptal

Prix : OUVRAGE BROCHÉ 720 F édition reliée 880 F

MASSON & C^o, Éditeurs, 120, Bd St-Germain, Paris-6^e

NOUVEAUTES :

COURS DE MATHÉMATIQUES G. CAGNAC ET L. THIBERGE

PROGRAMMES 1957

ARITHMÉTIQUE

CLASSE DE 6^e

Nouvelle édition, entièrement refondue

par

L. THIBERGE

Inspecteur général
de l'Éducation Nationale

E. GILET

Censeur des Etudes
du Lycée J.-B.-Soy

Un volume avec nombreuses figures, exercices, problèmes et **Travaux Pratiques**,
cartonné **980 F**

GÉOMÉTRIE ET ARITHMÉTIQUE

CLASSE DE 5^e

Nouvelle édition, entièrement refondue

par

L. THIBERGE

E. GILET

Un volume avec nombreuses figures, exercices et problèmes, cart. **1 050 F**

NOUVEAUTÉ :

Vient de paraître :

EXERCICES D'ANALYSE



TOME II



par

J. RIVAUD

*Agrégé des Sciences mathématiques
Docteur ès Sciences*

*Professeur de Mathématiques supérieures
au lycée Janson-de-Sailly*



Ce volume, à l'usage des élèves des classes préparatoires aux concours d'entrée aux grandes Ecoles et des étudiants des Facultés, complète le tome I. En voici le sommaire :

Fonctions de plusieurs variables. — Intégrales multiples. Intégrales curvilignes. — Volumes. Aires gauches. — Centre de gravité. Moment d'inertie. Centre de pression. Attraction newtonienne. — Equations différentielles à variables séparables. — Equations linéaires. Systèmes. — Champs scalaires et champs vectoriels. — Séries numériques. Fonctions complexes de variable réelle.



Volume 16 × 24 cm, de 260 pages **2 200 F**

Rappel : Tome I **2 200 F**

VUIBERT

63, Bd SAINT-GERMAIN, 63, PARIS V°

GAUTHIER - VILLARS

**55, Quai des Gds-Augustins
PARIS VI^e — DANton 05-10**

CAZIN (Michel)

EXERCICES DE MECANIQUE

Pour les classes de préparation aux grandes écoles. In-8° (16-25),
70 pages, 28 figures, 1959 600 F

CAZIN (Michel) et DEQUOY (Nicole)

COURS DE MECANIQUE

Pour les classes de préparation aux grandes écoles. In-8° (16-25),
200 pages, 29 figures, 1958. Broché 1 700 F
Cartonné 2 000 F

FLAVIEN (René)

NOUVELLES TABLES NUMERIQUES

Pour les Fonctions Usuelles de l'Analyse. Rédigées conformément aux
programmes du 27 juin 1956 pour les classes préparatoires aux
Grandes Ecoles Scientifiques. In-8° (13 X 21), 63 pages, 1958 400 F

GAY (R.)

COURS DE CRISTALLOGRAPHIE

Tome I

CRISTALLOGRAPHIE GEOMETRIQUE

In-8° (16-25), 253 pages, 108 figures, 1959. Relié 2 900 F

Tome II

CRISTALLOGRAPHIE PHYSICO-CHIMIQUE

In-8° (16-25), 232 pages, 151 figures, 1959. Relié 2 900 F

(Notices détaillées envoyées sur demande)

COURS DE MATHÉMATIQUES ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■

H. SCHAEFFER - J. LEBAILLE

ARITHMETIQUE, Cl. de 6^e

Un volume (15,5 × 22) Br. 460 F - Cart. 600 F

MATHEMATIQUES, Cl. de 5^e

Un volume (14,5 × 21) Br. 650 F - Cart. 790 F

MATHEMATIQUES, Cl. de 4^e

Un volume (14,5 × 21), avec complément Br. 840 F - Cart. 990 F

Le complément seul 120 F

MATHEMATIQUES, Cl. de 3^e

Un volume (15,5 × 22), avec complément Br. - Cart.

Le complément seul Juin 1959

*Tous les ouvrages de ce cours ont été complétés et rendus conformes
aux nouveaux programmes*

■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ **DELAGRAVE**

COURS DE MATHÉMATIQUES

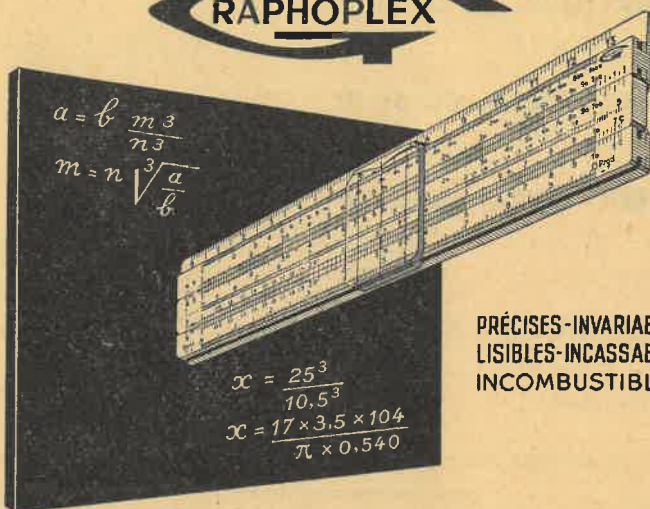
par **Pierre BOUTIN**

Ancien élève de l'Ecole Normale Supérieure
Professeur agrégé au Lycée Janson de Sailly

Nouveaux programmes

Classe de sixième	900 F
(Supplément à l'ancienne édition)	175 F
Classe de cinquième	s.p.
Classe de quatrième	850 F
(Fascicule complémentaire)	s.p.
Classe de troisième	s.p.

Éditions DE GIGORD, 15, rue Cassette, PARIS VI^e



PRÉCISES-INVARIABLES
LISIBLES-INCASSABLES
INCOMBUSTIBLES

Règles à Calculs

INSTRUMENTS DE DESSIN

Pochettes de compas. Qualité supérieure

Equerres et Règles en plexiglas transparent



Tarifs spéciaux pour commandes groupées

Catalogue sur demande

SEREB

148, rue de Noisy-le-Sec, Bagnolet

AVRon 11-83 - 18-65

LIBRAIRIE ANDRÉ DESVIGNE - 17, r. Mulet, LYON

MATHÉMATIQUES - COLLECTION COMPLÈTE

Classes de PREMIÈRE :

Lespinard et Pernet. — ALGÈBRE, classe de Première C.M.	Br. : 580 F - cart. : 750 F
» — GEOMETRIE, classe de Première C.M.	Br. : 685 F - cart. : 865 F
» — MATHÉMATIQUES, classe de Première A.B. ..	Br. : 585 F - cart. : 705 F
» — SOLUTIONS DE PROBLÈMES DE MATHÉMATIQUES, Bac, 1 ^{re} partie, séries C. et M.	330 F

Classes de SECONDE :

Lespinard et Pernet. — ALGÈBRE, classe de Seconde C.M.	Br. : 410 F - cart. : 560 F
» — GEOMETRIE, classe de Seconde C.M.	Br. : 575 F - cart. : 695 F
» — MATHÉMATIQUES, classe de Seconde A.B. Algèbre et Géométrie : 1 volume	Br. : 535 F - cart. : 655 F

COURS COMPLET DU 1^{er} CYCLE

PROGRAMMES 1958 - Edition Verte « Francs Lourds ».

Lespinard et Pernet. — MATHÉMATIQUES, TRAVAUX PRATIQUES, NOTIONS D'ASTRONOMIE (<i>illustrations en couleurs</i>) Cl. de SIXIÈME, Lycées Collèges	Br. : 515 F - cart. : 660 F
» — MATHÉMATIQUES, NOTIONS D'ASTRONOMIE (<i>illustrations en couleurs</i>) Cl. de CINQUIÈME, Lycées Coll.	Br. : 645 F - cart. : 795 F

PROGRAMMES 1958 - Edition Verte.

Lespinard et Pernet. — MATHÉMATIQUES, Cl. de QUATRIÈME, Lycées Coll.	Br. : 490 F - cart. : 640 F
» — MATHÉMATIQUES, Cl. de TROISIÈME, Lycées Coll.	Br. : 565 F - cart. : 695 F

Classe de SCIENCES EXPERIMENTALES :

Lespinard, Pernet et Gauzit. — MATHÉMATIQUES (Arithmétique, Algèbre et Trigonométrie, Mécanique et Cosmographie)	Br. : 830 F - cart. : 930 F
Edition 1958, refondue.	

Classe de PHILOSOPHIE :

Lespinard, Pernet et Gauzit. — ALGÈBRE ET COSMOGRAPHIE	Br. : 420 F - cart. : 550 F
Edition 1958, refondue.	

Classe de MATHÉMATIQUES :

Lespinard et Pernet. — GEOMETRIE	Br. : 795 F - cart. : 975 F
» — GEOMETRIE DESCRIPTIVE. Edit. 1957 refondue	Br. : 395 F - cart. : 540 F
» — ARITHMETIQUE	Br. : 400 F - cart. : 565 F
» — MECANIQUE. Edition 1958 refondue	Br. : 235 F - cart. : 385 F
Lespinard, Pernet et Gauzit. — COSMOGRAPHIE Edit. 1958 refondue	Br. : 335 F - cart. : 490 F
Lespinard et Pernet. — ALGÈBRE	Br. : 655 F - cart. : 845 F
» — TRIGONOMETRIE	Br. : 430 F - cart. : 595 F
» — SOLUTIONS DE PROBLÈMES DE MATHÉMATIQUES, Bac. 2 ^e partie, cl. de Mathématiques	565 F

Prix taxe locale incluse

COURS MARVILLET

R. GIRARD

Agrégé de l'Université et
Professeur au Lycée
JANSON de SAILLY

A. ADAM

Inspecteur
de l'Enseignement Primaire
de la Seine

A paraître
PRINTEMPS 1959

INITIATION AUX MATHÉMATIQUES



Pour les classes de 5^e des Lycées, Collèges et C.C.

La solution à la question des
TRAVAUX PRATIQUES

- ★ Cet ouvrage, entièrement nouveau, contient le développement complet du programme de 1957.
- ★ Comme le précédent pour la classe de sixième, il apporte la solution à la question des travaux pratiques sans pour autant perdre de vue la formation de la pensée logique.
- ★ Mais ce livre s'adresse à des élèves plus âgés et ayant reçu un début d'initiation mathématique. Les auteurs se sont donc efforcés de les conduire plus avant vers l'abstraction. C'est ainsi qu'à chaque **étude expérimentale**, qui comporte observation, expérimentation et contact effectif avec le réel, fait suite une **étude logique** où n'intervient que le seul raisonnement déductif.
- ★ Par sa méthode même, qui distingue soigneusement étude expérimentale et étude logique, par la gradation et la variété de ses travaux, qui constituent de véritables tests de connaissance, ce manuel doit faciliter l'**orientation des élèves**, orientation particulièrement importante à ce niveau d'étude.



Un volume 16 X 21, 2 couleurs S. P.

RAPPEL : Initiation aux Mathématiques - 6^e. Broché 670 F

Relié 790 F

MATHÉMATIQUES

COLLECTION C. BREARD

Cinq nouveautés conformes aux programmes 1958 :

● MATHÉMATIQUES. Classe de 6°.

520 F

Considérant le programme comme une base de départ pour les études des classes suivantes, l'auteur a introduit dans ce manuel :

- Un cours complet de calcul mental. Il a été tenu compte dans l'énoncé des exercices, des dernières réformes monétaires (nouveaux francs).
- Une initiation manuelle à la géométrie comprenant des travaux pratiques avec utilisation du compas, du rapporteur.
- Des travaux pratiques d'astronomie, élémentaires et n'exigeant aucun matériel.

● MATHÉMATIQUES. Classe de 5°.

Mise en vente en août

Pour cette classe de premier contact avec la théorie des nombres, l'auteur présente dans cet ouvrage :

- Un exposé rigoureux sur les nombres entiers et les fractions selon une méthode nouvelle très simple en contact constant avec l'expérimentation et la notion de mesure d'une grandeur.
- Un programme de géométrie où la notion de symétrie est assez largement utilisée.
- Des travaux pratiques d'astronomie pouvant être réalisés à l'œil nu ou à l'aide de jumelles.

● ARITHMÉTIQUE ET ALGÈBRE. Classes de 5°, 4° et 3°.

620 F

L'exposé de la théorie des nombres reste concret. À partir du dénombrement d'un ensemble discret, de la mesure des segments et de notions sur les vecteurs, se développe l'étude des nombres entiers, des fractions, des nombres relatifs, puis l'étude des fonctions et des équations. Les notions de correspondance et d'application sont mises en évidence.

● GÉOMÉTRIE. Classes de 5°, 4° et 3°.

690 F

L'exposé comporte de nombreuses nouveautés :

- Le parallélisme précède l'orthogonalité comme la géométrie affine précède la géométrie métrique.
- Les notions de symétrie et les vecteurs sont largement utilisés.

En outre, le programme de géométrie dans l'espace est développé complètement et près de 2.000 exercices et problèmes, soigneusement classés, sont proposés aux élèves.

● MATHÉMATIQUES. Classe de 2°.

Mise en vente en août

Cet ouvrage apporte une véritable révolution dans l'enseignement des mathématiques. L'exposé est axiomatique, mais utilise cependant le modèle concret des classes de 1^{er} cycle.

À l'exposé des notions de nombres, d'applications et de fonctions fait suite celui de la géométrie. La notion d'égalité est indépendante de la superposition. Presque toutes les démonstrations sont nouvelles et surprendront par leur simplicité.

Plus de 2.600 exercices et problèmes sont proposés dans ce manuel.

EN PRÉPARATION :

- MATHÉMATIQUES. Classe de 4° (Nouvelle édition).
- MATHÉMATIQUES. Classe de 3° (Nouvelle édition).
- MATHÉMATIQUES. Classe de 1^{re}.
- MATHÉMATIQUES. Classe de Mathématiques Élémentaires.

■ C'EST UNE COLLECTION DE L'ÉCOLE ■

11, Rue de Sèvres, PARIS

NOUVEAUTÉS

FERNAND NATHAN

18, rue Monsieur-le-Prince — PARIS (VI^e)

C. LEBOSSÉ et C. HÉMERY

ALGÈBRE et GÉOMÉTRIE

Classe de Troisième

Nouveau programme 1958

Conforme aux nouveaux programmes de cette classe (arrêté du 31 juillet 1958), ce volume comporte de profondes modifications : neuf leçons de Géométrie y sont consacrées à l'étude de la Géométrie dans l'espace, de nombreux problèmes nouveaux y figurent et une liste de travaux pratiques, adaptés au niveau de la classe, termine l'ouvrage.

■ Un volume cartonné, couverture jaune » F

C. LEBOSSÉ et C. HÉMERY

ARITHMÉTIQUE - ALGÈBRE - GÉOMÉTRIE

Classe de Quatrième

Nouveau programme 1958

L'arrêté du 31 juillet 1958 apporte peu de modifications au programme de Mathématiques de la classe de Quatrième. Toutefois, il a paru nécessaire de remanier le cours actuel en plaçant en tête de l'ouvrage les notions d'Arithmétique qui y figurent en proposant des exercices nouveaux et surtout en adjoignant à ce cours une liste de travaux pratiques variés et adaptés au niveau de cette classe.

■ Un volume cartonné, couverture jaune » F

ÉDITIONS DIDIER & RICHARD
GRENOBLE (Isère)

COURS DE MATHÉMATIQUES

PAR

ROUX & MIELLOU

Professeurs au Lycée de Grenoble

PROGRAMMES DU 18 AVRIL 1947

TARIF JUIN 1959

Taxe locale comprise

ARITHMÉTIQUE 6°	336 »
DESSIN GÉOMÉTRIQUE 6° et 5°	188 »
ARITHMÉTIQUE 5°	458 »
GEOMÉTRIE 5° et 4°. — Programme 1958	622 »
Fascicule de mise à jour 1958 pour la Géométrie 4°	76 »
ARITHMÉTIQUE et ALGÈBRE 4°. — Programme 1958	413 »
Fascicule de mise à jour 1958 pour l'Algèbre de 4°	76 »
Compléments de mise à jour 1958 pour l'Algèbre et la Géométrie de 4°	152 »
ARITHMÉTIQUE et ALGÈBRE 3°	510 »
GEOMÉTRIE 3°. — Nouvelle édition. Programme 1958	652 »
GEOMÉTRIE 5°, 4°, 3°, cartonnée. — Programme 1958	1 275 »
ALGÈBRE 2° A.B.C.M.	795 »
GEOMÉTRIE 2° A.B.C.M.	840 »
ALGÈBRE 1 ^{re} A.B.	438 »
ALGÈBRE et TRIGONOMÉTRIE 1 ^{re} C.M.	682 »
GEOMÉTRIE 1 ^{re} A.B.C.M.	713 »

POUR LES EXAMENS :

QUESTIONS DE COURS DE MATHÉMATIQUES DU BACCALAURÉAT, 1 ^{re} partie, A.B.C.M.	514 »
---	-------

sous la direction de R. MAILLARD,
Inspecteur général de l'instruction publique

COURS DE MATHÉMATIQUES

Conforme aux nouveaux programmes dans toutes ses leçons, ce cours de mathématiques se propose de renouveler la matière traditionnellement offerte tant dans l'exposé des leçons qu'en présentant des sujets de travaux pratiques et des problèmes qui intéressent l'élève par l'actualité de leurs sujets.

CLASSE DE 6^e

par R. CAHEN,
Professeur au Lycée Chaptal.

Un volume $15,5 \times 21$ cm, de 240 pages, illustré
sous couverture cartonnée, illustrée et plastifiée.

CLASSE DE 5^e

par R. CAHEN

Un volume $15,5 \times 21$ cm, de 400 pages, illustré
sous couverture cartonnée, illustrée et plastifiée.

CLASSE DE 4^e

par R. MAILLARD et E. CARALP,
Professeur au Lycée Montaigne.

Un volume $15,5 \times 21$ cm, de 424 pages, illustré
sous couverture cartonnée, illustrée et plastifiée.

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE - CLASSE DE 3^e

par R. MAILLARD, R. CAHEN et E. CARALP

Un fascicule $15,5 \times 21$ cm, de 64 pages, illustré.

CLASSIQUES HACHETTE

79, boulevard Saint-Germain, PARIS 6^e

ATELIER MATHÉMATIQUE

"GRAPHIQUES"

CLASSE DE 6^e

Un cahier de travaux pratiques.