6

Bibliographie

Des vecteurs et des hommes

par Jean Itard

Il me souvient vous avoir entretenus dans notre Bulletin 263-264, des Quaternions de Hamilton, et d'avoir esquissé dans la brochure « Matériaux pour l'histoire des nombres complexes » un historique des « Imaginaires ».

Je voudrais vous signaler maintenant un ouvrage américain « A History of Vector Analysis », par Michael J. Crowe (1).

C'est l'histoire des Vecteurs de naguère, avec leur produit scalaire et leur produit vectoriel, comment ils sont nés, à partir des Quaternions et de la Théorie de l'Extension de Grassmann, comment ils ont triomphé au tournant du siècle, et puis..., si l'on entrevoit l'apparition du calcul et de l'analyse tensorielle, cela tourne un peu court dans l'ouvrage, avec la mort d'Heaviside en 1925.

C'est le reproche que je ferais à l'auteur si j'avais quelque droit à un rôle de censeur. Il manque à son ouvrage une ouverture sur l'avenir, une note d'espoir, cette idée qu'aucune recherche n'est vaine, aucune voie définitivement bouchée si aucune bataille n'est définitivement gagnée.

Mais revenons au début, à la première apparition d'une somme vectorielle avec le parallélogramme des vitesses d'Aristote, puis le parallélogramme des forces à la Renaissance scientifique. Nous n'en avons ici qu'un simple survol suivi d'un, coup de chapeau à la Géométrie de situation de Leibniz. L'auteur rappelle ensuite l'apparition, aux environs de 1800, de nombreux essais sur la représentation géométrique des nombres complexes, avec Wessel (1797), Argand (1806), Buée (1806),

(1) A History of Vector Analysis; The evolution of the Idea of a Vectorial System. Michael J. Crowe, University of Notre-Dame Press; Notre-Dame, Indiana, 16 × 24 cm, 270 p., $ 12,95.

Mourey (1828), Warren (1828), sans oublier Gauss et Cauchy qui firent triompher cette représentation grâce à leur prestige.

Un chapitre entier est consacré à Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) et aux Quaternions. Ce qu'il y a de passionnant dans le travail de M. J. Crowe, c'est qu'à chaque page on y trouve des hommes, qui vivent, qui ont leurs qualités, leurs défauts, leurs ambitions, leur bonne foi, leur mauvaise foi, leurs faiblesses, leur grandeur, enfin, des hommes.

Le « Lagrange irlandais » ne s'est pas borné à inventer les Quaternions. Schrödinger dit de lui : « Sa fameuse analogie entre la mécanique et l'optique anticipe virtuellement la mécanique ondulatoire, qui n'eut pas grand-chose à ajouter à ses idées, si ce n'est de les prendre au sérieux — un peu plus au sérieux qu'il ne pouvait le faire, avec les connaissances expérimentales d'il y a un siècle. Le concept central de toutes les théories physiques modernes est l'« Hamiltionien ». Si vous voulez appliquer une théorie moderne à n'importe quel problème particulier, vous devez commencer par le mettre « sous forme Hamiltonienne ». Ainsi Hamilton est un des plus grands hommes de science que le monde ait produit.

En 1945, J. L. Synge écrivait de son côté « Hamilton fut un grand promoteur — peut-être le plus grand de tous les temps — du calcul des variations ».

Je trouve pour ma part cette affirmation un peu forcée. J'aime Lagrange comme d'autres aiment Brahms, et le plus grand artisan du calcul des variations restera toujours pour moi le Turinois qui l'inventa vers la fin de 1754, un peu avant ses 19 ans, et qui en fit dès 1756, à 20 ans, le fondement de la mécanique. Mais cela n'enlève rien aux grands, aux immenses mérites de l'Irlandais.

Pour en revenir à nos moutons rappelons qu'un quaternion est un complexe de la forme $a + bi + cj + dk$, où $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ et où $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.

C'est donc un espace vectoriel de dimension quatre sur $\mathbb{R}$. C'est d'autre part un corps, non commutatif. C'est même le premier exemple de corps de cette nature. Date de naissance, 16 octobre 1843. En 1865, cent cinquante mémoires sur les Quaternions étaient publiés, dont cent neuf par l'inventeur lui-même.

Mais la voie ouverte par Hamilton n'était pas la seule à déboucher sur les Vecteurs, et l'auteur rappelle les noms d'August Ferdinand Möbius (1790-1868), de Giusto Bellavitis (1803-1880), d'Hermann Günther Grassmann (1809-1877), d'Adhémar Barré, comte de Saint-Venant (1797-1886), d'Augustin Cauchy (1789-1857) et du Révérend Matthew O'Brien (1814-1855), à savoir deux Allemands, un Italien, deux Français et un Irlandais qui professait à Londres.

L'œuvre essentielle est ici celle de Grassmann, publiée en 1844, puis, augmentée, en 1862, sous le nom, les deux fois, d'*Ausdehnungslehre* (Science de l'Extension). Les « Clefs algébriques » de Cauchy, les études de Saint-Venant, ont des points communs avec les travaux de Grassmann, et cela ne fut pas sans quelques polémiques. Mias la priorité revient incontestablement à ce dernier, et il faut remarquer que ce sont ses conceptions qui se prêteront le mieux, plus tard, à l'extension du calcul vectoriel qu'est le calcul tensoriel. A ce point de vue les idées de Grassmann, qui ont enthousiasmé Giuseppe Peano (1858-1932), Cesare Burali-Forti (1861-1931) et Roberto Marcolongo (1862-1943) sont restées beaucoup plus vivaces que la théorie des Quaternions qui est un peu, de nos jours, une figure de Musée.

Rappelons que l'expression *produit extérieur* nous vient de Grassmann.

On doit à Möbius le *calcul barycentrique* (1827) et à Bellavitis le *calcul des équipollences* (1835) où vous reconnaissez le mot « équipollent » et qui est au fond l'application à la Géométrie du plan, du calcul sur $\mathbb{C}$, corps des complexes.

Ainsi, même si Hamilton ou un des autres n'avait pas fait sa découverte, la marche des Mathématiques n'en aurait pas été profondément troublée. Seuls des détails, comme le vocabulaire, auraient été modifiés. Il est bon de répéter ici que nous devons à Hamilton les mots *vecteur*, *produit scalaire*, *produit vectoriel*.

Pour en finir avec Grassmann, et pour que l'on comprenne bien que les mathématiques modernes que nous enseignons sont au moins centenaires c'est-à-dire sont traditionnelles, voici des notations de Grassmann que vous déchiffrerez sans mal :

$$a \cap b = b \cap a$$
$$(a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c) = a \cap b \cap c$$
$$(a \cup b) \cap b = a$$
$$(a \cap b) \approx c = a \approx c \cap b \approx c$$

Cela vaut les opérations *Truc* et *Machin*, et cela vise au même but : dégager une structure abstraite.

Mais reprenons le cours de l'histoire. L'auteur attire notre attention sur quatre savants qui occupent dans le domaine du calcul vectoriel — essentiellement sous la forme des quaternions — une place privilégiée pendant les années qui vont de 1865, date de la mort d'Hamilton, à 1880 environ.

Il fait d'abord remarquer que de 1841 à 1900 il a inventorié 594 publications relatives aux Quaternions, contre 217 relatives à l'analyse de Grassmann. Il nous parle ensuite de Peter Guthrie Tait (1831-1901), physicien écossais, ardent et farouche chef de file de l'école orthodoxe des Quaternions, et analyse son *Elementary Treatise on Quaternions* (1867). Il en profite pour nous parler de l'opérateur

$$\nabla = i\frac{d}{dx} + j\frac{d}{dy} + k\frac{d}{dz},$$

qui a été appelé ultérieurement soit *nabla*, soit *del*, soit *atled*.

Benjamin Peirce (1809-1880), le premier grand mathématicien des États-Unis, fut en Amérique, l'avocat des Quaternions. James Clerk Maxwell (1831-1879) ne les adopta pas immédiatement et il écrivait ses fameuses équations en 1860 dans les notations traditionnelles au moyen des coordonnées cartésiennes. Mais en 1873, dans son *Treatise on Electricity and Magnetism* il les donnait tant aux moyens des coordonnées que dans la notation des Quaternions.

Il apportait d'ailleurs quelques critiques aux conceptions d'Hamilton.

Avec William Kingdom Clifford (1845-1879), esprit très original, apparaît une tentative de calcul vectoriel indépendant des Quaternions, dans ses *Elements of Dynamic* (1878). Nous lui devons le mot « *Divergence* », obtenu en Analyse vectorielle en changeant le signe de la *Convergence* de Maxwell. Le calcul en Quaternions affectait en effet celle-ci d'un signe « moins » gênant.

Mais le véritable calcul vectoriel apparaît avec le physicien américain Josiah Willard Gibbs (1839-1903) et le physicien anglais Oliver Heaviside (1850-1925). Nous ne pouvons pas ici entrer dans les détails. Gibbs a connu les Quaternions dans Maxwell. Son désir de simplifier ce genre de calcul l'a conduit à des idées voisines de celles de Grassmann et en 1879 il donna un cours d'analyse vectorielle avec des applications à l'électricité et au magnétisme. Ses *Elements of Vector Analysis* sont apparus pour la première partie en 1881, pour la seconde en 1884. Notations de Gibbs, faciles à interpréter :

$$\alpha.\beta = \beta.\alpha ; \quad \alpha \times \beta = -\beta \times \alpha$$
$$\alpha.\beta = xx' + yy' + zz'$$
$$\alpha \times \beta = (yz' - zy')i + (zx' - xz')j + (xy' - yx')k$$
$$\alpha \times [\beta \times \gamma] = (\alpha.\gamma)\beta - (\alpha.\beta)\gamma$$
$$[\alpha \times \beta] \times [\gamma \times \delta] = (\alpha.\gamma \times \delta)\beta - (\beta.\gamma \times \delta)\alpha$$

Le système d'Heaviside est très proche de celui de Gibbs. Voici ce qu'il en disait lui-même en 1892 : « Il est fondé sur peu de définitions, et peut être regardé, à un certain point de vue comme une abréviation systématique de la méthode cartésienne d'investigation, et peut être compris et utilisé par toute personne habituée aux coordonnées cartésiennes, sans aucune étude de la difficile science des Quaternions. C'est simplement les éléments des Quaternions sans les Quaternions, avec la notation simplifiée au maximum, et après exclusion du très gênant signe *moins* devant les produits scalaires ».

Signalons que les premiers écrits d'Heaviside sur les vecteurs sont de 1882-83, destinés aux Électriciens, et indépendants de ceux de Gibbs. Tous deux s'étaient initiés aux Quaternions dans Maxwell.

Je vous fais grâce de l'histoire des luttes homériques qui eurent lieu dans les années 90 entre Quaternioniens orthodoxes et partisans des nouveaux calculs.

Vous devinez qui furent les vaincus : c'est en 1913 que parut le dernier numéro du *Bulletin of the International Association for Promoting the Study of Quaternions and allied Systems of Mathematics*.

Le calcul vectoriel eut quelque mal à s'acclimater dans l'Enseignement français. Éternel combat entre la tradition et le modernisme! Lors même qu'il devint courant il resta encombré d'appels à la trigonométrie. Le produit scalaire fut défini grâce au cosinus de l'angle des deux vecteurs, le produit vectoriel fit intervenir le sinus. Je parle de choses récentes, dont ne s'occupe nullement l'auteur du livre que je viens d'analyser. Cette intrusion logiquement illicite des fonctions circulaires se conçoit historiquement. Depuis Viète à la fin du XVI^e siècle, et surtout depuis Euler au XVIII^e siècle, elles étaient devenues un outil précieux pour les Analystes. Malgré eux, la plupart des professeurs pensaient Trigo. Ils en mettaient partout. Ils voyaient là une voie naturelle qu'ils imposaient à leurs élèves, par persuasion, ou par autorité, selon leur tempérament.

Je ne suis pas sûr que cela ne recommence pas en d'autres domaines. Ainsi pour le plan affine je ne comprends pas pourquoi l'on impose au départ une quasi-identification de la droite avec $\mathbb{R}$. Une bonne axiomatique se passerait fort bien de cela, qui arriverait ensuite de soi-même. Il suffirait par exemple après les axiomes d'appartenance, d'ordre et de continuité d'ajouter le postulat d'Euclide, l'existence d'une droite de direction donnée passant par tout point donné et enfin : si AA', BB', CC' sont parallèles ainsi que, d'une part, AB et A'B', d'autre part AC et A'C', alors BC et B'C' sont parallèles.

Tout le plan affine est là.

Quant à la continuité, pourquoi ne pas postuler : les seuls convexes de la droite sont les demi-droites et les segments?

Mais j'ai l'air de me mêler de ce qui ne me regarde pas, et il ne faut pas trop confondre axiomatique et pédagogie.

A propos de cette dernière je dois signaler une étude de notre collègue R. Dolci :

Technique et Problèmes de l'Enseignement des Mathématiques, 61 pages ronéotypées, que l'on peut se procurer chez l'auteur, 6, rue Franchipani, 83-La Seyne. C'est le résultat d'une vie d'enseignement « le fruit d'une patiente réflexion inspirée par une double expérience. Celle de ce qu'il est convenu d'appeler l'incompréhension des mathématiques et qui date de mon adolescence, celle beaucoup plus tardive que m'a apportée ma situation de professeur. »

Nous voici donc revenus à notre métier.

Excusez mon long bavardage.

Jean ITARD.