A Limoges

Expérimentation en 4e.

Dans l'Académie de Limoges, depuis trois ans, de la Sixième à la Quatrième, des expérimentations existent dans deux Lycées de filles (5 classes), un C.E.S. (3 classes) et deux C.E.G. L'équipe comprend, sous la direction de M. Couty, professeur à l'Université de Limoges, un inspecteur-professeur, quatre certifiés, quatre P.E.G.C., un maître-auxiliaire. L'expérimentation est conduite dans six classes dites I et sept classes dites II.

Travail de préparation. L'équipe se réunit régulièrement le vendredi de 20 h 30 à 23 heures (ou plus) tous les quinze jours, avec la participation parfois de l'Inspecteur Pédagogique Régional. Ces réunions ont deux buts essentiels :

— faire le point sur les succès ou les échecs de la quinzaine passée; pour les causes d'échecs, la participation aux réunions d'un psychologue scolaire aurait peut-être rendu service;

— concevoir les fiches pour la quinzaine à venir.

La progression pour assurer l'étude complète du programme pendant l'année scolaire est sans cesse revue et aménagée selon les intérêts et les possibilités des enfants.

Après chaque réunion, les fiches étudiées, mises au point sont confiées au Centre Régional de Documentation Pédagogique qui assume la lourde tâche matérielle de diffuser les fiches pour les élèves des classes d'expérimentation.

Quelques constatations.

1° Élèves. — Si les fiches pour la classe de Sixième permettaient au professeur d'être un animateur de travail individuel, le progrès vers l'abstraction l'oblige au niveau de la Quatrième à agir plus souvent pour organiser des synthèses collectives pour obtenir un travail de pensée de plus en plus rapide.

A ce propos, nous déplorons en Quatrième que les élèves des classes II aient le même horaire que les classes I. Si nous pouvions disposer d'une heure de travail dirigé ou de soutien pour ces élèves, ils auraient moins de difficultés pour comprendre, puis utiliser les modèles mathématiques. Nous avons constaté que la méthode inductive, avec une approche plus lente des concepts, avait d'heureux effets sur les élèves moyens.

Les fiches sont collationnées dans un cahier sur lequel de temps en temps des lois générales sont inscrites. L'utilisation du cahier d'essai réservé à la mathématique, a très souvent rendu d'importants services pour consolider les connaissances des élèves moyens.

Le contrôle des connaissances est assuré par quelques fiches-tests, données dans toutes les classes d'expérimentation à des dates variables, car l'expérience nous a montré que pour certains concepts quelques classes allaient plus vite que d'autres, alors que parfois l'inverse se produisait. La remarque ci-dessus pour les classes II entraîne le professeur à limiter, pour celles-ci, les applications à des exercices numériques surtout.

2° Professeurs. — Le travail de conception en commun a permis d'éviter des hésitations dans les classes, de promouvoir un enseignement cohérent avec ses qualités et aussi ses défauts. Parfois, en ce qui concerne les démonstrations, nous avons été un peu ambitieux, en vue de la continuité avec les classes du second cycle. Certaines classes I ou II d'ailleurs ont joué le jeu, mais on a été obligé de revenir à la simple description du modèle mathématique dans d'autres classes. Nous restons persuadés qu'il faut obliger les enfants dès la Sixième, à user de la démonstration dans des cas très simples sur les ensembles $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$. Par exemple dans $\mathbb{Z}$:

$$a = b \Leftrightarrow a + c = b + c$$

alors que cette propriété est admise dans $\mathbb{N}$.

Notre travail nous paraît être une réussite en ce qui concerne le début du programme de Quatrième sur les groupes, nous avons obtenu la créativité des enfants et une recherche convenable de cette structure. En calcul numérique, nous avons l'impression d'une efficacité certaine, mais il faut attendre la classe de Seconde pour se prononcer définitivement. L'approche des réels par les encadrements, les intervalles a donné lieu à l'étude de lois de composition, interne ou externe dans l'ensemble de ces objets. Nous ne pensons pas avoir pleinement réussi. Pour les résolutions d'équations et la géométrie les enfants ont retrouvé un meilleur rythme de travail.

3° Aspect matériel. — A la joie du travail en commun succède toujours la rédaction des fiches, l'impression, la correction des épreuves. Après trois années, nous constatons que malgré beaucoup de précautions, sans ménager notre temps, nous avons laissé quelques imprécisions dans nos fiches. Certaines imprécisions sont issues de nos réunions, mais le plus souvent ce sont les élèves de quelques classes qui nous les ont révélées pendant leurs travaux.

Notre expérience montre qu'il est nécessaire que les établissements scolaires assurent une partie de la duplication pour que le travail par fiches soit efficace afin que les professeurs ne soient pas astreints à un travail matériel trop lourd.

Mise en œuvre du programme.

Les hypothèses de travail de l'équipe pour l'application du programme défini par la Commission Ministérielle ont été les suivantes :

— Continuité de l'enseignement mathématique de l'école élémentaire au second cycle;

— Construction des ensembles de nombres, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{R}$, par chaque enfant selon son propre rythme;

— Approche des notions par des manipulations physiques ou intellectuelles;

— Exercices d'application pour consolider les connaissances.

Ce qui revient à ce qu'a fort bien expliqué Gilbert Walusinski dans un *Bulletin de l'A.P.M.* il y a quelques années. L'enfant construira ses propres mathématiques selon le schéma suivant :

- de l'observation à la notion,
- de la notion à la théorie,
- de la théorie à l'application,
- de l'application à de nouvelles observations, et le cycle d'étude recommence.

L'enseignement donné s'est orienté dans deux directions complémentaires : affiner l'outil mathématique et vérifier dans les applications le bien fondé de cet affinage (applications dans les domaines des diverses sciences physiques et humaines). Nous avons essayé de discerner ces deux voies à chaque instant.

La continuité avec l'enseignement élémentaire se situe au niveau du numérique, et l'on peut regretter que la classe de Quatrième n'use pas plus des « opérateurs numériques » liés à $\mathbb{Q}$ pour présenter $\mathbb{R}$. En effet, les enfants de l'école élémentaire jouent avec plaisir avec cette notion de fonction dans des sous-ensembles finis de $\mathbb{N}$.

Les démonstrations, qu'elles soient algébriques ou géométriques, assurent une approche très intéressante des programmes du second cycle.

En ce qui concerne les ensembles de nombres, si la construction de $\mathbb{Z}$ en Sixième et Cinquième à partir de $\mathbb{N}$ a été aisée (réserves à faire au sujet de la multiplication dans $\mathbb{Z}$), la construction de $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{D}$ ne nous a pas satisfait complètement, c'est-à-dire que les enfants se sont sentis plus mal à l'aise. Les remarques ci-dessous ont entraîné un redoublement d'attention de notre part afin de faire coïncider nos hypothèses de travail et la lettre du programme.

Pour l'étude des ensembles de nombres, nous voulions respecter les programmes et aussi nos hypothèses de travail qui peuvent se résumer dans le schéma suivant :

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dr] & & \\ N \arrow[ur] \arrow[dr] & & Q \arrow[r] & R \\ & Q_+ \arrow[ur] & & \end{tikzcd} \qquad \text{avec } D \subset Q$$

Les programmes ne parlent pas de $\mathbb{Q}$, nous n'avons pas fait une étude mathématique de cet ensemble; nous avons construit $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{D}$. Nous nous sommes heurtés à un certain nombre de difficultés, mais en même temps nous avons fait découvrir l'unité de la mathématique à nos élèves.

a) Nos élèves ont appris à poser à l'école élémentaire une division et à effectuer des divisions avec des nombres décimaux. La division leur apparaît toujours possible. Implicitement ils raisonnent dans un corps et non dans un anneau. Nous avions avantage à considérer pour eux, afin d'être plus précis sur les structures mathématiques, l'inclusion $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.

b) Les décimaux sont plus faciles à manipuler que les rationnels à cause de leur écriture. Les calculs numériques sont faciles à présenter. Mais nous sommes amenés dans l'approche de $\mathbb{R}$ à résoudre des équations telles que :

$\frac{a}{b} = x \Leftrightarrow a = bx$ vraies uniquement dans $\mathbb{R}$, or, le calcul pratique pour les enfants se fait apparemment dans $\mathbb{D}$.

c) Mathématiquement, $\mathbb{R}$ est un corps commutatif parce que $\mathbb{Q}$ en est un. Nous avons dû affirmer dans le passage $\mathbb{D}$ à $\mathbb{R}$ un certain nombre de résultats, qui peuvent être démontrés dans $\mathbb{Q}$.

$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
$\left.\begin{matrix} a \geqslant b \\ c > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow ac \geqslant bc$	$\left.\begin{matrix} a \geqslant b \\ c > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} ac \geqslant bc \\ c > 0 \end{matrix}\right.$	$\left.\begin{matrix} a \geqslant b \\ c > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} ac \geqslant bc \\ c > 0 \end{matrix}\right.$
$a = bx \Rightarrow \frac{a}{b} = x$	$a = bx \Leftrightarrow \frac{a}{b} = x$	$a = bx \Leftrightarrow \frac{a}{b} = x$
$\left.\begin{matrix} a = b \\ c \neq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow ac = bc$	$\left.\begin{matrix} a = b \\ c \neq 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} ac = bc \\ c \neq 0 \end{matrix}\right.$	$\left.\begin{matrix} a = b \\ a \neq 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} ac = bc \\ c \neq 0 \end{matrix}\right.$

Admettre ... $\Leftrightarrow$ ... pour les enfants, alors que nous ne pouvons étudier dans $\mathbb{D}$ ... $\Rightarrow$ ... n'a pas été facile.

d) Les enfants ont très bien compris, malgré quelques lourdeurs dans les calculs, les constructions selon les processus suivants.

En Sixième, puis Cinquième, nous avons fait apercevoir la construction de $\mathbb{D}$ considéré comme sous-ensemble de $\mathbb{Q}$. Actuellement, la construction de $\mathbb{Q}^+$ est amorcée à l'école élémentaire par l'intermédiaire des « opérateurs ». Ainsi, en Sixième et Cinquième, nous avons fait comprendre les constructions de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ (avec $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$) par le passage aux ensembles quotients. Cette méthode de travail a plu aux enfants.

En Quatrième, le respect du programme et le manque de temps nous ont obligés à abandonner en partie cette attitude, et nos élèves n'ont pas toujours compris.

e) La construction de $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{D}$ a permis de consolider les techniques de calcul pour la division. Sur des exemples numériques, nous avons essayé de suggérer que le corps $\mathbb{R}$ devait sa structure plus à $\mathbb{Q}$ qu'à $\mathbb{D}$. Ainsi, nous avons montré les liens qui existent entre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$, non seulement dans le sens du programme où $\mathbb{Q}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, mais dans le sens du schéma ci-dessus :

$$\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}.$$

f) Sur le plan pratique, on montre que les ensembles construits à partir des classes d'équivalence forment une « collection » distincte de $\mathbb{R}$. Pour le physicien, c'est la différence entre le dénombrable et le « continu physique ». Sans aucun doute, la construction de $\mathbb{R}$ par les encadrements est bénéfique pour les applications physiques.

A titre d'exemples, nous présentons trois fiches :

1° en Cinquième, Ordre dans $\mathbb{Z}$;

2° en Quatrième, Ordre dans $\mathbb{D}$;

3° en Quatrième, une approche de la géométrie.

Notre jeu de fiches est disponible au C.R.D.P. de Limoges, 44, cours Gay-Lussac.

***

Ordre dans $\mathbb{Z}$ (classe de 5[e]).

I

On considère la relation R définie dans $\mathbb{Z}$ par :

$a \mathrel{R} b \Leftrightarrow$ (il existe un entier naturel x, ($x \in \mathbb{Z}^+$) tel que : $a = b + x$.)

1° Vérifier que : $12 \mathrel{R} 5$; $\overline{13} \mathrel{R} \overline{17}$; $4 \mathrel{R} 0$;
$0 \mathrel{R} \overline{5}$; $9 \mathrel{R} \overline{14}$; $\overline{7} \mathrel{R} \overline{7}$.

2° La relation R est-elle réflexive? Symétrique? Antisymétrique? Transitive? Comment appelle-t-on une telle relation?

Notation: $a \mathrel{R} b$ se notera $a \geqslant b$ et on lira : « a supérieur ou égal à b »
ou aussi $b \leqslant b$ et on lira : « b inférieur ou égal à a ».

II

Choisir cinq éléments de $\mathbb{Z}^-$, puis cinq éléments de $\mathbb{Z}^+$ et les comparer à 0 à l'aide de la relation R; que remarquez-vous?

1° Montrer que si $a \in \mathbb{Z}^+$, alors : $a \geqslant 0$.

2° Compléter : $0 = a + \ldots$
en déduire que si $a \in \mathbb{Z}^-$, alors : $a \leqslant 0$.

III

1° Pour deux éléments a et b, de $\mathbb{Z}$, on a nécessairement :

$$a \geqslant b \quad \text{ou} \quad a \leqslant b$$

Compléter par l'un des symboles : $\geqslant$ ou $\leqslant$ en justifiant chaque fois :

$17 \ldots 15$; $11 \ldots 18$; $12 \ldots 12$; $22 \ldots 48$
$\overline{14} \ldots 29$; $13 \ldots \overline{51}$; $17 \ldots \overline{10}$; $\overline{3} \ldots 20$
$\overline{16} \ldots \overline{4}$; $\overline{22} \ldots \overline{6}$; $\overline{43} \ldots \overline{80}$; $7 \ldots \overline{2}$

Que remarquez-vous?

2° Comparer a et b lorsque :

$a \in \mathbb{Z}^+$ et $b \in \mathbb{Z}^-$ (on utilisera II).

3° Montrer que :

$$a \geqslant b \Leftrightarrow \operatorname{opp}(a) \leqslant \operatorname{opp}(b)$$

en déduire une méthode pratique pour comparer a et b lorsque $a \in \mathbb{Z}^-$ et $b \in \mathbb{Z}^-$.

Exemple : $a = \overline{35} \Rightarrow \text{opp}\,(a) = \ldots$ $\}$ opp $(a) \ldots$ opp (b)
$b = \overline{52} \Rightarrow \text{opp}\,(b) = \ldots$ $\}$ donc $a \ldots b$

écrire d'autres exemples.

Montrer les propriétés suivantes :

$$\boxed{\begin{array}{l} a \geqslant b \Rightarrow a + c \geqslant b + c \\ a \geqslant b \quad \text{et} \quad c \geqslant d \Rightarrow a + c \geqslant b + d \end{array}}$$

Attention

Si $a \geqslant b$ et $c \geqslant d$, on peut avoir soit $a + c \geqslant b + d$
soit $a + c \leqslant b + d$

trouver un exemple dans chacun de ces cas.

IV

Compléter le tableau suivant :

a	opp (a)	plus grand des 2 nombres : a et opp (a) (justifier)
8		
$\overline{19}$		
$\overline{43}$		
0		
162		

Définition: le plus grand des deux nombres a et opp (a) s'appelle *valeur absolue* de a : on le note $|a|$.

Comparer $|a|$ et 0.

Compléter : si $a \in \mathbb{Z}^+$ alors $|a| = \ldots$
si $a \in \mathbb{Z}$ alors $|a| = \ldots$

***

Exercices d'application.

I

Classer dans l'ordre croissant les nombres :

$7,\ \overline{18},\ \overline{24},\ 0,\ 2,\ 24,\ \overline{45},\ 3,\ \overline{2}$

II

Écrire l'ensemble des éléments x de $\mathbb{Z}$ vérifiant :

1) $3 \geqslant x$

2) $\bar{7} \leqslant x$

3) $3 \geqslant x$ et $\bar{7} \leqslant x$

III

On considère la relation S de source $\mathbb{Z}$, de but $\mathbb{Z}^+$ et de lien verbal : « a pour valeur absolue ».

1) S est-elle une application ? Une bijection ?

2) Déduire de S une relation d'équivalence dans $\mathbb{Z}$; préciser son lien verbal et donner des exemples de classes d'équivalence.

Ordre dans $\mathbb{D}$ (classe de 4e).

I. — Définition.

• Soit la relation R définie dans $\mathbb{D}$ par $a \mathrel{R} b \Leftrightarrow$ (il existe un élément x de $\mathbb{D}^+$ tel que $a = b + x$).

$$\mathbb{D}^+ = \{a \times 10^n / a \in \mathbb{Z}^+ \quad \text{et} \quad n \in \mathbb{Z}\}$$

• Montrer que R est une relation d'ordre dans $\mathbb{D}$.

• Notation :

$a \mathrel{R} b$ se note $a \geqslant b$. On lit « a est supérieur ou égal à b » quels que soient a et b de $\mathbb{D}$: $a \geqslant b \Leftrightarrow b \leqslant a$ « $b \leqslant a$ » se lit « b est inférieur ou égal à a ».

• Montrer que, quels que soient a et b de $\mathbb{D}$:

$$a \geqslant b \Leftrightarrow a - b \geqslant 0$$

II. — Compléter le tableau suivant :

a	b	c	$a-b$	$a \geqslant b$ ou $a \leqslant b$	$a+c$	$b+c$	$(a+c) - (b+c)$	$a+c \geqslant b+c$ ou $a+c \leqslant b+c$	$a-c$	$b-c$	$(a-c) - (b-c)$	$a-c \geqslant b-c$ ou $a-c \leqslant b-c$
16,54	4,2	41,134										
$7,\bar{1}23$	3,7	$0.\bar{0}8$										
$12,\bar{0}08$	$\bar{5},42$	23										
93,2991	104	$1\bar{4},12$										
$\bar{1}7$	$\overline{21}$	32										

• Comparer les résultats des colonnes 5, 9 et 13.

• **Démonstrations.**

— Calculer :

$$(a+c)-(b+c)$$
$$(a-c)-(b-c)$$

— Compléter :

$$a \geqslant b \Leftrightarrow a-b \ldots \Leftrightarrow (a+c)-(b+c) \ldots \Leftrightarrow a+c \ldots b+c$$

même travail pour $a-c$ et $b-c$.

• Conclusion :

Quels que soient a, b et c de $\mathbb{D}$:

$$a \geqslant b \Leftrightarrow a+c \ldots \Leftrightarrow a-c \ldots$$

• En déduire que, quels que soient a, b, c, d de $\mathbb{D}$:

$$(a \geqslant b \quad \text{et} \quad c \geqslant d) \Rightarrow (a+c \geqslant b+d)$$

III. — Compléter le tableau suivant :

a	b	c	$a-b$	$a \geqslant b$ ou $a \leqslant b$	ac	bc	$ac-bc$	$ac \geqslant bc$ $ac \leqslant bc$
98	43	11						
$4\overline{4}$	$\overline{88}$	2,5						
$5\overline{1}$	18	$\overline{9}$						
72	168	125						
$1\overline{9}$	$2\overline{8}$	0,001						
37,1	$4\overline{3},03$	$\overline{4}$						
$1\overline{7}$	19,14	1 000						
49,273	$7,\overline{12}88$	0						

• Comparer les colonnes 5 et 9.

• **Démonstrations :**

— $(a \geqslant b \quad \text{et} \quad c \geqslant 0) \Rightarrow (a-b \ldots \quad \text{et} \quad c \geqslant 0)$

$(a-b \quad \text{et} \quad c \geqslant 0) \Rightarrow (a-b)c \ldots$ car ...

$(a-b)c \ldots \Rightarrow ac-bc \ldots$ car ...

$ac-bc \ldots \Rightarrow ac \ldots bc$ car ...

Démontrer :

— $(a \geqslant b \quad \text{et} \quad c \leqslant 0) \Rightarrow \ldots$

• **Conclusion.**

Quels que soient a, b, et c de $\mathbb{D}$:

$$(a \geqslant b \quad \text{et} \quad c \geqslant 0) \Rightarrow$$
$$(a \geqslant b \quad \text{et} \quad c \leqslant 0) \Rightarrow$$

IV. — Valeur absolue.

• Définition :

On appelle valeur absolue de a ($a \in \mathbb{D}$) le plus grand de deux nombres a et $\boxed{a}$ (opposé de a).

Notation $|a|$.

Quel que soit a de $\mathbb{D}$:

$$a \in \mathbb{D}^+ \Rightarrow |a| = a$$
$$a \in \mathbb{D}^- \Rightarrow |a| = \boxed{a}.$$

• Compléter :

x	y	$x - y$	$\|x\|$	$\|y\|$	$\|x - y\|$	$\|x\| - \|y\|$	$\|\|x\| - \|y\|\|$	$\|x\| + \|y\|$	$x + y$	$\|x+y\|$	α	β

α Classer dans l'ordre croissant les nombres des colonnes 6, 8, 9.

β Classer dans l'ordre croissant les nombres des colonnes 9 et 11.

Une approche de la géométrie (classe de 4e).

I

1° Rappel : $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est l'ensemble des couples de nombres réels.

2° a) E est une partie de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$E = \left\{(a\,;\, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,/\, \begin{matrix} a = 2\,x \\ b = 3\,x \end{matrix}\right\}$$

x pouvant prendre n'importe quelle valeur, compléter à l'aide l'un des signes : $\in$; $\notin$;

$(6;\ 9) \ldots E \qquad (18;\ 27) \ldots E \qquad (32;\ 45) \ldots E$

$(168;\ 252) \ldots E \qquad \left(\frac{2}{3};\ 1\right) \ldots E \qquad \left(\frac{1}{5};\ \frac{2}{7}\right) \ldots E$

Donner cinq éléments de E (autres que ceux déjà trouvés).

b) F est une partie de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dont les éléments sont des couples du type $(ax\,;\ bx)$ où a et b sont *fixés* et où x est variable (x peut prendre n'importe quelle valeur).

Compléter, en justifiant chaque réponse, à l'aide de $\in$ ou $\notin$.

a) $(0;\ 0) \ldots$ F; *b*) $(a\,;\ b) \ldots$ F; *c*) $(2a\,;\ b) \ldots$ F.

c) Trouver les deux valeurs entières les plus petites possibles de a et b sachant que : $(12;\ 15) \in$ F.

d) G est l'ensemble des couples du type : $(8y\,;\ 12y)$, y *variable ;* comparer G et E.

II

A. — *a*) D_1, partie de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est l'ensemble des couples du type $(x\,;\ 2x - 3)$ x *variable :*

— Donner cinq éléments de D_1.

— Compléter : $(\ldots;\ 5) \in D_1$

$(\ldots;\ \bar{1}) \in D_1$

$(3;\ \ldots) \in D_1$ $(\ldots;\ 19) \in D_1$

$(\bar{1}\bar{7};\ \ldots) \in D_1$ $\left(\frac{7}{5};\ \ldots\right) \in D_1$

$\left(\frac{\bar{1}}{2};\ \ldots\right) \in D_1$.

b) D_2 est l'ensemble des couples du type $(u\,;\ u + 1)$ u *variable :*

— Donner cinq éléments de D_2.

— Compléter : $(0;\ \ldots) \in D_2$

$(147;\ \ldots) \in D_2$

$(\ldots;\ 0{,}7) \in D_2$

$(4;\ \ldots) \in D_2$

Existe-t-il au moins un couple commun à D_1 et D_2?

B. — Déterminer cinq éléments de chacune des parties de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ définies ci-dessous :

D_3 : ensemble des couples du type $\left(x,\ \frac{x}{2}\right)$, x variable.

D_4 : ensemble des couples du type $(u,\ u - 1)$, u variable.

c) On veut déterminer l'intersection des parties D_5 et D_6 définies par :
D_5 : ensemble des couples $(x, x - 1)$.
D_6 : ensemble des couples $(y, 5 - y)$.
Si l'intersection n'est pas vide, alors tout couple commun à D_5 et D_6 vérifie obligatoirement $x = y$; et $x - 1 = 5 - y$.
Ce qui amène a : $x - 1 = 5 - x$.
Résoudre l'équation $x - 1 = 5 - x$ et trouver le *seul* couple appartenant à l'intersection de D_5 et D_6.

Exercices :

Déterminer l'intersection des parties de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ suivantes :

1° D_1 : ensemble des couples $(x, x + 1)$ et D_2 ensemble des couples $(y, 2y - 4)$.

2° D_3 : $\left(x, \frac{x}{2}\right)$ et D_4 : $(x, 6 - x)$.

3° D_5 : $\left(x, \frac{x}{2} + 1\right)$ et D^6 : $\left(x, \frac{x}{2} + 5\right)$. Remarque sur $D_5 \cap D^6$?

4° D_7 : $(x, 1 - x)$ et D^8 : $\left(\frac{x}{3}, x - 7\right)$.

5° D^9 : $(x, 6x + 8)$ et D_{10} : $(x, 5x - 19)$.

6° D_{11} : $(x, 3x - 7)$ et D_{12} : $\left((x, 3x + \frac{5}{3}\right)$.

7° D_{13} : $(x, x - 7)$ et D_{14} : $(x, x - 7)$.

On cherche à répondre aux mêmes questions que dans les exercices précédents pour les parties.

$$D : (x, ax + 1) \qquad D' : (x, a'x + 4)\ a,\ a' \text{ sont fixés.}$$

— Quelle condition a et a' doivent-ils vérifier pour que $D \cap D' = \varnothing$ (retrouver ce cas dans les exemples précédents)?
— Quelle condition a et a' doivent-ils vérifier pour que $D \cap D' \neq \varnothing$ (même remarque)?

On considère les 2 parties de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$D : (x, ax + b) \qquad D' : (x, a'x + b')$$

En choisissant les valeurs de a, b, a', b', inventer :

a) Trois exemples où l'intersection de D et D′ contient un seul point.

b) Trois exemples où l'intersection est vide.

c) On choisit : $b = b'$. Donner trois exemples à votre choix. Les trois intersections trouvées ont-elles un caractère commun? Lequel?
Justifier le résultat en cherchant l'intersection de :

$$D : (x, ax + b) \quad \text{et} \quad D' : (x, a'x + b)$$

Compléter : $a \neq a'$ $\quad D \cap D' =$

$a = a'$ $\quad D \cap D' = \ldots$

$D = \ldots$

Compléter alors ce tableau résumé des résultats précédents :

$$D \to (x, ax + b)$$
$$D' \to (x, a'x + b')$$

$a \neq a'$	$a = a'$ et $b \neq b'$	$a = a'$ et $b = b'$
intersection contient.......	$D \cap D' = \ldots$	$D \cap D' = \ldots$

Une partie $D \to (x, ax + b)$ contient les points $(3; 4)$ et $(5; 8)$:
On veut calculer a et b.

Indication : *a)* $x = 3 \Rightarrow a \times 3 + b = 4$

b) $x = \ldots \Rightarrow a \times \ldots + b = \ldots$

Existe-t-il plusieurs valeurs possibles pour a et b?
Même question pour D' $(x, ax + b)$ contenant les points $(0; 1)$ et $(2; 2)$.

D'' $(x, ax + b)$ contenant les points $(0; 3)$ et $(6; 0)$.

Exercices: Déterminer $D : (x, ax + b)$ dans les cas suivants :

1° $\quad (0; 1) \in D$ et $(3; 2) \in D$

2° $\quad (\bar{1}; 0) \in D$ et $(3; 1) \in D$

3° $\quad (1; 1) \in (D)$ et $(2; 2) \in D$

4° $\quad (3; 3) \in (D)$ et $(5; \bar{5}) \in D$

— Existe-t-il plusieurs possibilités dans chacun de ces quatre cas?
— Imaginer d'autres exemples (au moins 4).
— Combien trouvez-vous de possibilités à chaque fois?

Conclusion : Une partie $D \to (x, ax + b)$ est parfaitement connue si on connaît *deux* de ses éléments.

Autre énoncé : Il existe une seule partie D $(x, ax + b)$ contenant deux « points » donnés.