Quelques remarques sur la géométrie en 4e.

G. AGUADO,
Professeur au Lycée du Mas-de-Tesse,
Montpellier.

Introduction.

Il a semblé à l'équipe des expérimentateurs de Montpellier que le point essentiel de la classe de Quatrième en géométrie est de bien faire sentir qu'il n'y a aucun point commun entre des constatations faites sur des « figures » et des déductions.

Nous avons donc cherché à montrer aux élèves que les constatations faites sur des figures permettent de choisir un certain nombre de règles du jeu, appelées en mathématiques axiomes, à partir desquelles ils pourront faire des déductions. Autrement dit, nous avons fait valoir que, le choix des axiomes étant arrêté, ils ne peuvent plus constater.

Bien entendu, il nous semble qu'en Quatrième, il ne peut être question d'interdire de faire des dessins. Cependant, ces dessins permettent de choisir un itinéraire parmi plusieurs possibilités, pour déduire à partir des axiomes.

Nous pensons que si, au départ de l'apprentissage de la géométrie, les distinctions entre :

— constatations,
— choix des axiomes,
— déductions,

sont nettement dégagées, alors il n'y aura plus de confusion dans l'esprit des élèves.

Ces considérations ont fait que nous nous sommes interdit de mettre dans une même fiche des parties « constatations » et des parties « déductions ». Pour chaque question, nous nous sommes efforcé d'établir trois types de fiches.

1° Une fiche de constatations, comportant éventuellement des constructions géométriques, c'est-à-dire tout ce qui se rapproche du dessin, de ce que nous avons appelé peut-être improprement des objets matériels.

2° Une fiche d'axiomes, montrant le choix des règles adoptées dans la théorie mathématique du cours.

3° Des fiches de déductions, c'est-à-dire de démonstrations faites à partir de ces axiomes, ou à partir d'axiomes, définitions et théorèmes acquis antérieurement.

Voici par exemple, et de façon schématique, comment nous avons abordé l'axiome de Thalès dans nos classes expérimentales.

Fiche n —1

Projection d'une droite sur une droite.

1° Rappels.

Dans ce paragraphe, nous avons extrait d'une fiche précédemment étudiée, quelques rappels relatifs à la projection.

2° Tracés de parallèles.

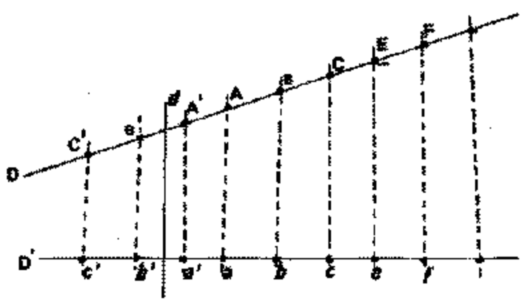
a) Construction classique à partir de la *règle* et de l'*équerre*.

Ce sont de simples manipulations à partir d'une « recette », le bagage mathématique des élèves ne leur permettant pas d'en comprendre le déroulement.

b) Construction de parallèles « équidistantes » avec intervention d'un nouvel outil le *compas* pour graduer une droite.

3° Abscisse de la projection d'un point.

On fait tracer aux élèves deux droites quelconques D et D′, parallèles ou non, du plan matériel et une troisième droite d, non parallèle à D et non parallèle à D′.



A l'aide d'un compas, D est alors munie d'une graduation que l'on projette ensuite sur D′ parallèlement à d. (Nous entendons, bien sûr, par graduation une graduation « équidistante ».)

On fait deux constatations :

a) A l'aide d'un compas, on vérifie qur : $\{a, b, c, \ \ldots, a', b', c', \ldots\}$ est une graduation de D′.

b) Si sur D on choisit un repère et si sur D′ on choisit comme repère la projection du précédent, un point de D et sa projection sur D′ ont même abscisse. (A l'aide du schéma, nous avons considéré de nombreux exemples dans différents repères.)

Fiche n

Axiome de Thalès.

Cela s'avérant nécessaire, nous décidons d'ajouter une nouvelle règle du jeu aux deux règles qui ont été précédemment admises (axiomes d'incidence) et cette nouvelle règle du jeu porte le nom d'axiome de Thalès que nous avons énoncé ainsi :

d étant une droite non parallèle à deux droites quelconques D et D', si l'on projette parallèlement à *d*, la droite D munie d'un repère (A, B) sur la droite D' munie du repère (A', B') projection de (A, B), alors tout point M de D et sa projection M' sur D' ont même abscisse.

On peut en déduire ensuite la définition du plan mathématique donné en annexe du dernier projet de programme.

Remarque.

Nous avons fait cette leçon conformément au $p^{\text{ième}}$ projet de programme qui suggérait la présentation de l'axiome de Thalès sous cette forme d'ailleurs aisément assimilable par les élèves. Depuis, le $(p+1)^{\text{ième}}$ projet propose de présenter cet axiome sous une nouvelle forme.

On peut d'ailleurs passer facilement de la première forme à la seconde.

Les élèves savent que sur une droite D' :

$\overline{mn}_{(a',\, b')} = k.\overline{mn}_{(a,\, b)}$ avec $k \in \mathbb{R}^*$.

De la première forme de l'axiome de Thalès, on déduit :

$\overline{mn}_{(a,\, b)} = \overline{\text{MN}}_{(A,\, B)}$ (M, N, A, B appartenant à une droite D).

En définitive :

$\overline{mn}_{(a',\, b')} = k.\overline{\text{MN}}_{(A,\, B)}$ qui est la seconde traduction de l'axiome de Thalès et qui deviendrait ainsi un théorème.

Fiche $n+1$

Applications de l'axiome de Thalès.

(Nous ne développerons ici que la première application).

1° Projection de barycentres.

(La notion de barycentre est déjà connue des élèves).

p désigne la projection d'une droite D sur une droite D' parallèlement à une droite *d* (*d* non parallèle à D et non parallèle à D').

D est munie d'un repère (a, b) et on choisit comme repère de D′ la projection (a', b') de (a, b). A, B, M sont trois points de D se projetant sur D′ respectivement en A′, B′, M′.

On suppose que M est le barycentre des deux points A et B affectés respectivement des coefficients α et β. Les élèves savent alors traduire cette hypothèse par la relation $\alpha.\overline{MA}_{(a,\ b)} + \beta.\overline{MB}_{(a,\ b)} = 0$.

On se propose de démontrer que M′ est le barycentre des points A′ et B′ affectés des coefficients α et β. Grâce à l'axiome de Thalès, les élèves, guidés par la fiche, établissent que :

$$\alpha.\overline{MA}_{(a,\ b)} + \beta.\overline{MB}_{(a,\ b)} = \alpha.\overline{M'A'}_{(a',\ b')} + \beta.\overline{M'B'}_{(a',\ b')}$$

et par conséquent que :

$$\alpha.\overline{M'A'}_{(a',b')} + \beta.\overline{M'B'}_{(a',\ b')} = 0$$

puisque

$$\alpha.\overline{MA}_{(a,\ b)} + \beta.\overline{MB}_{(a,\ b)} = 0$$

On fait ensuite remarquer aux élèves que seul le souci d'une démonstration simple utilisant l'axiome de Thalès sous sa première forme a présidé au choix du repère de D′ mais qu'en fait, la conclusion serait la même quel que soit le repère de D′ puisqu'ils savent qu'un changement de repère ne modifie pas le barycentre de deux points affectés de coefficients donnés.

Bien entendu, avant de poursuivre, on passe à la mise en forme du théorème résultant de la démonstration précédente.

La projection du milieu d'un bipoint apparaît comme un cas particulier de la projection de barycentre.

2° Application de l'axiome de Thalès au triangle et sa réciproque.

3° Construction de barycentres de deux points.

L'axiome de Thalès permet de faire découvrir aux élèves une construction du barycentre de deux points affectés de coefficients donnés, construction qui n'est pas une simple recette de la construction des parallèles « équidistantes»