

La pédagogie mathématique existe : je l'ai rencontrée

Il fut un temps où, entre les manuels scolaires et les grands traités mathématiques, il n'y avait rien ou pas grand-chose en langue française tout au moins. A croire que tous les étudiants, dans notre pays, tous les professeurs de lycée ou de collège étaient des génies : pour s'informer ou se former qu'ils lisent les grands auteurs! En principe, le conseil est excellent; il y a toujours profit à revenir aux textes. Dans la pratique, c'était une autre affaire; BOURBAKI, par exemple, n'est pas d'un abord facile.

Le besoin d'ouvrages « intermédiaires » et que je qualifie de cette façon non pour les situer dans une hiérarchie d'ouvrages impossible à imaginer mais parce qu'ils joueraient effectivement le rôle d'intermédiaire entre des ouvrages scolaires et des traités de référence, le besoin de ces ouvrages s'est fait tellement sentir que, même chez les éditeurs français, on s'est décidé à en publier. Le succès que nous avons fait au *Cours de l'A.P.M.* par A. et G. REVUZ peut avoir incité les éditeurs à s'engager dans une voie qu'ils semblaient ignorer.

Ils ne pouvaient être les seuls coupables. Les lecteurs potentiels ne se manifestaient pas. Surtout, les auteurs semblaient ne pas vouloir s'intéresser à ce genre un peu spécial dans lequel leur science ou, si vous voulez, leur compétence mathématique ne suffirait pas : des qualités particulières de rédaction, un constant souci pédagogique, seraient indispensables. Personne n'osait.

Peu à peu, d'excellents mathématiciens ont osé et chacun avec son tempérament propre a contribué à l'enrichissement de la bibliothèque du professeur soucieux de renouveler sa formation de base ou son perfectionnement. Dans cet ordre d'idées, je citerai en particulier : « *L'enseignement de la géométrie* » par CHOQUET, « *Cours d'Algèbre* » par GODEMENT, « *Théorie élémentaire des fonctions analytiques de variables complexes* » par H. CARTAN, « *Méthodes numériques* » par J. KUNTZMANN et « *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire* » (1) par J. DIEUDONNÉ. A dessein, je cite celui-ci en dernier car il me paraît typique d'une certaine formule : l'auteur y présente avec vigueur et netteté une thèse, fournit aux professeurs qui le liront des matériaux utiles, à charge pour eux d'en tirer une présentation accessible à des jeunes élèves; s'adressant à des professeurs, l'auteur n'a pas cherché à leur simplifier l'accès de ses idées; à

(1) Tous édités dans la collection *Enseignement des Sciences* par Hermann. Le succès remporté par ces ouvrages, auprès de nous est un démenti à l'opinion récemment formulée par le Professeur Leray et selon laquelle les maîtres qui enseignent dans les collèges ou les lycées refusaient de se cultiver.

certains égards, on pourrait même le soupçonner d'avoir malicieusement choisi le ton le plus rude pour écarter d'emblée les délicats... Inconvénient mineur du procédé : engager certains lecteurs pressés à en inférer que les mathématiciens de l'enseignement supérieur sont incapables du moindre effort pédagogique.

Le livre de notre Collègue GLAESER (qui va succéder à notre Collègue FRENKEL à la direction de l'I.R.E.M. de Strasbourg) a le premier mérite d'opposer un démenti à cette allégation; ce n'est pas le seul et je voudrais en dire quelques-uns.

Par son titre « *Mathématiques pour l'élève professeur* » (2) il peut sembler restreindre son auditoire. Une minute de réflexion suffit à voir qu'il n'en est rien : tout professeur en activité de fonction est un élève professeur; il a plus à apprendre (de ses élèves, des autres professeurs, de la vie en général) qu'à enseigner. Ce livre nous concerne tous, par conséquent; mais pas nous seulement. Toute personne qui désire réellement comprendre les profondes raisons du mouvement de réforme de l'enseignement mathématique y trouvera réponse. Dommage que les amateurs de polémique qui dans les journaux pour grand public ou en d'autres lieux nous rebattent les oreilles sur les échecs de la réforme dans tous les pays du monde, ne lisent pas ce livre. Il ne perd pas son temps à réfuter leurs mauvais arguments, il expose clairement et tout simplement les principales idées qui animent les réformateurs.

Cinq grands chapitres. Le chapitre zéro traite de l'activité mathématique : excellent et nécessaire préambule. A quoi bon tenter l'impossible définition de la mathématique? Mieux vaut décrire l'activité du mathématicien; cela débouche naturellement sur celle de l'élève mathématicien (nous en sommes). Un exemple : rien de commun (ou presque) entre une authentique recherche mathématique (même au plus humble niveau) et le décryptage d'un énoncé de baccalauréat (où la suite totalement ordonnée des questions conduit le candidat à établir un micro-théorème; c'est le type de ces énoncés d'exercice qui conseillent, en fait, de ne pas réfléchir). Par la place qu'il fait à l'heuristique, plus loin au langage mathématique et à la logique, il est bien clair que GLAESER voit fort justement dans la réforme tout autre chose qu'un changement de programmes. C'est à une profonde mutation de cet enseignement qu'il apporte, je ne dirai pas sa pierre, objet trop immuable, mais, beaucoup mieux, sa flamme.

Ayant bien posé, dans ce chapitre zéro, l'objectif véritable de la réforme : faire de l'enseignement mathématique une formation et par conséquent pour les élèves une activité créatrice, GLAESER prend le temps de bien poser les problèmes du langage mathématique et celui de la logique (maladroitement rangé par l'éditeur sous le titre « Science de la démonstration » qui me paraît en restreindre la portée). La brièveté relative de ces chapitres engagera seulement le lecteur à poursuivre son information et ses réflexions dans cette voie; une abondante bibliographie l'y guidera.

Enfin, GLAESER illustre son propos par deux exposés mathématiques : la théorie des ensembles (le chapitre 3), questions métriques et topologiques (chapitre 4). Tout au long du livre, chaque propos de portée générale est suivi d'énoncés d'exercices dont beaucoup sont très facilement adaptables dans nos classes.

Le ton du livre fait aussi son agrément. Rien d'ennuyeux ou de prétentieusement docte; une ironie très opportune rappelle au lecteur, à tout moment, qu'il n'y a pas de solution pédagogique définitive. Des illustrations souvent plaisantes, par DESCLOZEUX, s'accordent bien au propos de GLAESER. Son livre engage le lecteur à

(2) *Mathématiques pour l'élève professeur* par Georges GLAESER, collection « Formation des enseignants », avec des illustrations par J.-P. DESCLOZEUX; 204 p. Prix : 24 F. Hermann éditeur.

réfléchir, à mettre en cause ses propres convictions pédagogiques acquises par des années de pratique pédagogique (qui devraient toujours être des années de réflexion, mais qui peuvent dégénérer en roulement de simple pratique).

Si bien que ce livre paraissant en 1971, dans un climat général de réaction contre les réformes, est mieux et plus qu'une bonne action, un rayon de soleil qui atteste l'existence, la vérité, l'avenir du printemps pédagogique.

* *

La parution de l'*Algèbre* (3) par MAC LANE et BIRKHOFF, traduit de l'américain par J. WEIL, est un autre événement important pour notre culture mathématique et la réforme véritable de notre enseignement. Des mêmes auteurs, j'avais lu « A survey of modern algebra » (4) (mon édition date de 1953 mais ce n'était pas la première); modeste ouvrage de 472 pages, modeste quant aux ambitions, riche d'idées sur les structures fondamentales, mais qui devait néanmoins être considéré comme une introduction; excellente parce qu'elle invitait à lire d'autres ouvrages, mais ces autres ouvrages n'étaient pas aussi lisibles.

Ainsi que le disent les auteurs dans leur avant-propos, depuis ce temps (les années 30 à 50) l'algèbre dite moderne s'est développée, c'est-à-dire que la compréhension de l'algèbre s'est approfondie: il s'agit moins d'étudier telle structure, tel système, que les homomorphismes de ces systèmes. De là l'importance primordiale accordée dans ce livre à la notion de *catégorie*; à partir des exemples familiers (que les auteurs disent « concrets »), comme dans leur *Survey*, les idées générales et abstraites s'organisent par la notion de *catégorie*.

A ce sujet, j'ai lu une curieuse objection sous la plume d'un critique qui se demandait s'il est vraiment utile d'introduire la notion de *catégorie* à un niveau aussi élémentaire (toutes proportions gardées). J. DIEUDONNÉ, qui a rédigé une préface pour cette traduction française, n'est peut-être pas tout à fait de cet avis bien qu'il fasse écho à ces mathématiciens qui voient mal comment des raisonnements aussi généraux pourraient être appliqués avec fruit à des problèmes plus concrets. Je ne suis pas compétent pour en juger au niveau de la mathématique conquérante. Mais au niveau qui est celui du lecteur de ce livre (et c'est, à mon avis, ce qui importe ici) il me paraît que l'existence, mieux la mise en évidence, d'une idée organisatrice de l'ensemble, est une réussite pédagogique (5).

Sous la plume du même critique, on considère comme un parti-pris original celui d'utiliser le langage des catégories pendant quinze chapitres et de n'en faire la théorie qu'ensuite alors que, sur des exemples, le concept a été assimilé. S'il est bien vrai que ce parti-pris est original, il faut le déplorer; à tous les niveaux, de la

(3) *Algèbre* par S. MAC LANE et G. BIRKHOFF; tome 1: Structures fondamentales, 408 p., prix 49 F; tome 2: Les grands théorèmes, 344 p., prix 49 F. Gauthier-Villars éditeur.

(4) *Survey* avait pour auteurs BIRKHOFF et MAC LANE; le nouveau livre, MAC LANE et BIRKHOFF; l'esprit du premier, un des initiateurs de la théorie des catégories y prédomine.

(5) Certains opposants aux réformes en cours dans les niveaux primaire et secondaire ne disent-ils pas que l'introduction de la notion de groupe est superflue, la théorie des groupes ne devenant réellement intéressante qu'aux niveaux supérieurs? Objections à rapprocher d'une remarque entendue au Congrès des professeurs de français à propos de l'usage des « arbres » selon CHOMSKY: « si CHOMSKY voyait l'usage fait parfois de ses arbres, il deviendrait partisan du déboisement! ». Il faut pourtant que les savants se fassent une raison; c'est pour tous les hommes qu'ils travaillent, y compris pour ceux qui déformeront leurs idées.

Maternelle à l'Université, c'est le cas de le dire, ne faudrait-il pas qu'il en soit ainsi? On en voit ici la vertu et ce fameux chapitre XV sur *Catégories et foncteurs adjoints*, je doute qu'on le lirait aussi aisément s'il n'était pas précédé de tous les exemples familiers. Dès le chapitre I sur ensembles et fonctions, le paragraphe 8 introduit la notion de foncteur (par exemple, le foncteur \mathcal{P} , « ensemble des parties ») et celle d'élément universel.

La progression des chapitres montre la fidélité des auteurs à ce principe pédagogique : après les ensembles, les entiers, les groupes, les anneaux, les corps, les modules, les vectoriels, les matrices, les déterminants et produits tensoriels. Le découpage de la traduction en deux volumes (qui rend ceux-ci plus maniables) regroupe sous le titre « Les grands théorèmes » : similitude des matrices et groupes abéliens finis, formes quadratiques, espaces affines et projectifs, structure des groupes, treillis (dans sa préface, DIEUDONNÉ allant jusqu'à ne pouvoir écrire ce mot, aurait souhaité que ce chapitre les « lattices » soit omis et que celui sur les espaces affines soit allégé; je reviendrai sur cette remarque), le fameux chapitre sur les catégories, l'algèbre multilinéaire. Le chapitre XVII et dernier, *Théorie de Galois*, a été spécialement rédigé pour cette édition française; le sujet figurait dans l'ancien *Survey*; il est repris ici dans l'esprit général de l'ouvrage et lui donne une magnifique conclusion.

Je voudrais encore insister sur deux qualités de ce livre. A l'intérieur des chapitres, chaque paragraphe est suivi de nombreux exercices très judicieusement rédigés; des exercices brefs mais de bonne portée. Le traducteur, notre Collègue J. WEIL, de l'Université de Montpellier, ne s'est pas contenté d'une recherche très scrupuleuse des équivalents français aux termes et expressions anglais; il a ajouté de très précieuses notes; à partir de remarques terminologiques, elles servent à la compréhension profonde du texte.

Cet ouvrage est donc d'un intérêt exceptionnel. Il a bénéficié d'une publicité qui pouvait surprendre (jusque dans les quotidiens où l'on voit plus souvent vanter les mérites des romans d'amour ou de mémoires pseudo-historiques). Loin de s'en formaliser, il faut s'en réjouir. Ne pas se demander, comme certains l'ont fait, si ces deux livres étaient exactement adaptés à tel programme de licence ou de maîtrise. C'est de l'excellente mathématique sous une forme qui la rend très lisible. Que peut-on demander de mieux? Espaces affines et projectifs peuvent être atteints par une simple traduction des théorèmes de l'algèbre linéaire, comme le dit DIEUDONNÉ dans sa préface; pour l'apprenti, il n'est pas inutile qu'on le guide dans cette transcription.

On retrouve ici une observation formulée par GLAESER : il faut penser constamment au lecteur, varier son style en fonction de ce dernier. MAC LANE et BIRKHOFF ont suivi ce bon précepte, de là leur pleine réussite.

Laurent SCHWARTZ avait publié en 1967 son *Cours d'analyse* de l'École Polytechnique sous une forme polygraphiée qui en faisait un ouvrage très volumineux et d'une lecture rendue plus difficile pour qui n'avait pas suivi le cours oral (surtout quand on sait la qualité d'exposition des cours ou conférences par SCHWARTZ). Dans la collection « Enseignement des Sciences » de HERMANN, voici le développement de la deuxième partie de ce cours sous le titre « Topologie générale et analyse fonctionnelle » (436 pages).

Pour les étudiants de deuxième cycle, pour les professeurs, le début représente une introduction remarquable à la topologie : espaces métriques, espaces topolo-

giques, fonctions continues et homéomorphismes, suites et limites, filtres, topologie produit et topologie quotient, espaces compacts. Espaces vectoriels topologiques, espaces hilbertiens terminent l'ouvrage.

A noter que s'il n'y a aucun énoncé d'exercice, chaque chapitre est précédé d'un résumé en une page; le lecteur retrouve mieux ainsi l'enchaînement des idées. Rédaction, notations, soin de la présentation sont irréprochables.



J'ai voulu rapprocher les ouvrages précédents alors que leurs auteurs poursuivaient, en les écrivant, des objectifs différents. Mais il se trouve que ces livres paraissent à une époque où les maîtres ressentent le besoin de perfectionner leur formation. Indirectement, mais de la meilleure façon, ils contribueront donc à la réforme en profondeur de notre enseignement.

Cela aurait suffi à me faire rédiger ce compte rendu et par conséquent à dépasser la morosité qui, selon certains, envahit notre époque. Mais dès l'abord, GLAESER avait su faire disparaître de mon horizon tout nuage; sur mon exemplaire de son livre, il avait écrit cette vérité : « Quel beau métier que le nôtre! »

Gilbert WALUSINSKI.