Rubrique des problèmes de l'A.P.M.

Cette rubrique est pour le plaisir, celui qui nous fait choisir les mathématiques à vingt ans, et non directement pour notre enseignement.

Le niveau ne doit pas excéder celui des classes préparatoires ou des deux premières années de faculté. Un certain caractère d'originalité dans l'énoncé est souhaité, ce qui exclut, en particulier, les applications immédiates de théorèmes classiques, ou les problèmes déjà parus dans d'autres revues.

Si l'auteur d'un énoncé n'est pas en mesure d'en donner la solution, il doit accompagner son envoi du maximum d'informations concernant le problème, afin d'aider les responsables de la rubrique. Un astérisque signale un problème dont la solution n'est pas connue de ceux-ci. Le bulletin publie les meilleures solutions.

Enoncés et solutions sur feuilles séparées et tapées à la machine S.V.P. N'oubliez pas de signer. Toute correspondance concernant la rubrique est à adresser à :

Gérard LETAC
Rubrique des problèmes
I.U.T. de Clermont
B.P. 29
63 — AUBIERE

ENONCES

Les solutions des problèmes suivants doivent nous parvenir avant le 15 mars 1973

Enoncé n° 26 (Pierre MAMEL — Etudiant à Poitiers)

On prend 2^n allumettes, on forme p tas de $a_1, a_2, \ldots, a_p$ allumettes respectivement. On a le droit de modifier ces tas de la manière suivante : on double un des tas à l'aide d'allumettes prises dans un seul autre tas. On recommence cette opération jusqu'à ce qu'il n'y ait plus qu'un seul tas.

Quel est, en fonction de $a_1, a_2, \ldots, a_p$, le nombre minimum de coups nécessaire pour arriver à ce résultat ?

Enoncé n° 27 (Gérard LETAC)

Addition et soustraction sont gratuites. La multiplication de deux nombres réels, quels qu'ils soient, coûte 1 franc. On peut descendre à 4 francs le prix de revient du calcul de

$$1 + a + a^2 + \ldots + a^7 = (1 + a)(1 + a^2)(1 + a^4)$$

Est-ce bien le coût minimum ?

Enoncé n° 28 (G. COLLOMBAT — Chambéry)

Soient a et b des entiers, avec $0 \leqslant a \leqslant b$. On considère une famille $\mathcal{F}$ de parties d'un ensemble E, toutes de cardinalité b, telle que si A et B sont dans $\mathcal{F}$, si $|A \cap B| \geqslant a$, $P \subset A \cup B$ et $|P| = b$, alors P est dans $\mathcal{F}$ (Exemple : $\mathcal{F}$ ensemble de triplets de points alignés dans l'espace, $a = 2$).
Montrer que si A, B et C sont dans $\mathcal{F}$, si $|A \cap C| \geqslant a$, $|B \cap C| \geqslant a$, $P \subset A \cup B \cup C$ et $|P| = b$, alors P est dans $\mathcal{F}$.

SOLUTIONS

Enoncé n° 17 (Louis COMTET — Faculté des Sciences d'Orsay)

Soit $Z(n)$ l'entier $1^n + 2^n + \ldots + n^n$. Si p est premier impair, montrer que $Z(p) \equiv 0 \bmod p^2$.

Solution (E. EHRHART — Strasbourg)

Quels que soient l'entier a et le nombre impair p (*premier ou non*), p^2 divise

$$a^p + (p-a)^p = a^p - (a-p)^p = pa^{p-1} - C_p^2\, a^{p-2}\, p^2 + C_p^3\, a^{p-3}\, p^3 \ldots + p^p$$

Donc il divise

$$Z(p) = p^p + \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{p-1} [a^p + (p-a)^p]$$

Autres solutions de : Marcel BAUVAL (Versailles), Gilbert BLANCHARD (Marseille), Serge BOMPY (Villeparisis), Jean-Paul BRAULT (Brest), J. CHONE (Thiers), Roger CUCULIERE (CPR Paris-Nord), Patrick GONNEAU (CPR Paris-Sud), Paul LABERENNE (Professeur Honoraire au Lycée Chaptal, Paris), Jacques LEGRAND (Faculté des Sciences de Bordeaux), Marie-Claire MASSE (Confolens), ONIMUS et D. REISZ (Auxerre), Roger RIVET (I.N.S.A. Rennes), Jean ROUAH (IPES Paris), Michèle VIAN (CPR Versailles), J. VINCENT (Toulon), Pierre SAMUEL (Faculté des Sciences d'Orsay) et l'auteur.

La plupart des solutions remarquent que p impair suffit. Aussi, diverses généralisations sont-elles proposées :

$$\frac{Z(p)}{p^2} \equiv \frac{p-1}{2} \bmod p^2 \text{ si p est premier impair (Cuculière)}$$

$1^p + 2^p + \ldots + n^p \equiv 0 \bmod \mathrm{pgcd}\,(n^2, p^2)$ si p impair (Onimus et Reisz)

$1^{p^j} + 2^{p^j} + \ldots + p^{p^j} \equiv 0 \bmod p^{j+1}$ si p premier impair (Samuel)

Enoncé n° 20 (M. DUPAC — Ecole Normale de Limoges)

Démontrer que tout entier positif divise une puissance de 10 ou une différence non nulle de 2 puissances de 10.

Solution de R. PRUDHOMME

Soit n un entier positif donné. Soit r_k le reste de la division de 10^k par n ($0 \leqslant r_k < n$). Lorsque k varie de 1 à $+\infty$, r_k, ne pouvant prendre qu'un nombre fini de valeurs, reprend au moins deux fois la même valeur. Donc il existe k et k' ($k \neq k'$) tels que

$$10^k \equiv 10^{k'} \mod n$$

Solution de Madame GALINAT (Lycée Montaigne — Bordeaux)

Un entier positif n peut s'écrire $n = 2^{a_1} \times 5^{a_2} \times m$ avec PGCD $(10,m) = 1$. Si on pose $a = \mathrm{Sup}\,(a_1, a_2)$, $2^{a_1} \times 5^{a_2}$ divise 10^a. Comme 10 et m sont premiers entre eux, la classe de 10 modulo m est inversible dans Z/mZ, et le théorème d'Euler-Fermat dit que $10^{\varphi(m)-1} - 1 \equiv 0(m)$. La quantité φ (m) désigne l'indicateur d'Euler de m. L'entier n divise donc

$$10^a \times \left(10^{\varphi(m)-1} - 1\right)$$

Autres solutions de : H. BARBERIS (Menton), Roger CUCULIERE, Lucien KIEFFER (Luxembourg), Christian RADOUX (Rochefort, Belgique), Christian RODRIGUEZ (Faculté des Sciences de Marseille).

Enoncé n° 21 (J. GAYHEADER — Nantucket College)

Résoudre, en nombres rationnels positifs, les équations

$$x^y = y^x \quad \text{et} \quad x^y = xy\ .$$

Solution par André BLANCHARD (Université de Provence — Marseille)

On considérera seulement les solutions en rationnels strictement positifs, ce qui n'écarte que des solutions évidentes.

1) Les solutions de l'une des deux équations se déduisent aisément des solutions de l'autre. Si dans la relation $x^y = y^x$, on pose $y = tx$, cela devient $x^{tx} = (tx)^x$, d'où résulte $x^t = tx$. Inversement de $x^t = tx$ résulte $x^{tx} = (tx)^x$, soit $x^y = y^x$ en posant $y = tx$.

2) Etudions alors l'équation $x^y = xy$. Cette équation équivaut à $x^{y-1} = y$; nous voyons alors les solutions que nous appellerons "solutions triviales", soit $y = 1$ avec x rationnel arbitraire.

Soit maintenant une solution non triviale, c'est-à-dire avec $y \neq 1$; nous pouvons écrire $x = y^{1/(y-1)}$ et si nous représentons y par une fraction *irréductible* p/q, nous voyons que la recherche des solutions non triviales revient à ceci : trouver les couples (p,q) d'entiers ***positifs distincts premiers entre eux et tels que*** $(p/q)^{(q/p-q)}$ *soit rationnel*.

Si p et q vérifient ces conditions, q et $p-q$ sont aussi premiers entre eux, et si l'on pose $k = |p-q|$, les deux nombres p et q sont des puissances k-ièmes dont la différence est égale à k.

Remarquons alors que l'identité

$$m^k - n^k = (m-n)\,(m^{k-1} + m^{k-2}n + \dots + n^{k-1})$$

entraîne $m^k - n^k \geqslant 2^{k-1} + k-1$, donc $m^k - n^k > k$ si $k \geqslant 2$, m et n étant des entiers strictement positifs distincts. *Les conditions données entraînent donc* $k = 1$, *c'est-à-dire* $|p-q| = 1$.

On voit alors quelles sont les solutions non triviales de l'équation $x^y = xy$: on a, d'une part, les solutions $y = \dfrac{q+1}{q}$ $x = \left(\dfrac{q+1}{q}\right)^q$ où q prend les valeurs entières à partir de 1 : on a, d'autre part, les solutions $y = \dfrac{q-1}{q}$, $x = \left(\dfrac{q-1}{q}\right)^{-q}$ où q prend les valeurs entières à partir de 2.

3) Nous déduisons maintenant les solutions de $x^y = y^x$ des résultats précédents. Nous avons, d'une part, les solutions triviales dans

lesquelles $x = y$ est un rationnel quelconque, puis deux familles dont l'une est $x = \left(\frac{q+1}{q}\right)^q$, $y = \left(\frac{q+1}{q}\right)^{q+1}$, q prenant les valeurs entières à partir de 1 ; la deuxième famille se déduisant de la première en échangeant x et y.

Autres solutions de Roger Cuculière (CPR Paris-Nord), Raymond Prudhomme (Faculté des Sciences de Lille), un collègue qui signe Abonné 04692 (Lycée Berthollet, Annecy) et l'auteur.