# Rubrique des problèmes de l'A.P.M.

Cette rubrique est pour le plaisir, celui qui nous fait choisir les mathématiques à vingt ans, et non directement pour notre enseignement.

Le niveau ne doit pas excéder celui des classes préparatoires ou des deux premières années de faculté. Un certain caractère d'originalité dans l'énoncé est souhaité, ce qui exclut, en particulier, les applications immédiates de théorèmes classiques, ou les problèmes déjà parus dans d'autres revues.

Si l'auteur d'un énoncé n'est pa en mesure d'en donner la solution, il doit accompagner son envoi du maximum d'informations concernant le problème, afin d'aider les responsables de la rubrique. Un astérisque signale un problème dont la solution n'est pas connue de ceux-ci. Le Bulletin publie les meilleures solutions.

Enoncés et solutions sur feuilles séparées et tapées à la machine s'il vous plait. N'oubliez pas de signer. Toute correspondance concernant la rubrique est à adresser à:

Monsieur Gérard LETAC
Rubrique des problèmes
I. U. T. de CLERMONT
B.P. 29
6 3 1 7 0 AUBIERE

## ENONCES

Les solutions des problèmes suivants doivent nous parvenir avant le 15 juin 1973.

*Enoncé n° 29* (G. COLLOMBAT — Chambéry)
Soient $H_1, \ldots, H_n$ des hyperplans de l'espace réel affine de dimension p tels que si $t \leq p + 1$, l'intersection de t quelconques de ces hyperplans soit une variété linéaire de dimension $p - t$ (donc vide pour $t = p + 1$).

L'hyperplan affine $H_i$ limite deux demi-espaces ouverts $H_i^+$ et $H_i^-$. Les signes $\epsilon_i = \pm$ étant aléatoires, indépendants et de même loi définie par:

$$\Pr(\epsilon_i = +) = \Pr(\epsilon_i = -) = \frac{1}{2} ,$$

montrer que

$$\Pr\left(\bigcap_{i=1}^{n} H_i^{\epsilon_i} \neq \phi\right) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{p} C_n^k$$

*Enoncé n° 30* (F. POLVÊCHE — Nevers)

Deux échelles de longueurs respectives 2m et 3m s'appuient simultanément et de façon alternée sur deux murs verticaux et parallèles. Les extrémités basses s'appuient sur un sol horizontal. Ces échelles "se coupent" (en vue profil) à 1m du sol. Quel est l'écartement des deux murs ?

*Enoncé n° 31* (A. ADLER — Paris)

Soit un polygone convexe possédant un nombre impair de sommets n. On trace toutes les diagonales, décomposant ainsi le polygone en polygones partiels. Démontrer qu'aucun des polygones de décomposition ne peut avoir plus de n côtés et que, s'il existe un polygone de n côtés, celui-ci est unique.

*Enoncé n° 32* (I.R.E.M. de Strasbourg)

Soient deux familles finies $\{A_i\}$ et $\{B_i\}$ $i \in \{1, 2, ..., n\}$ de points d'un espace euclidien telles que pour tout $\{i, j\} \subset \{1, 2, ..., n\}$ on ait $\|A_i A_j\| \leqslant \|B_i B_j\|$. Est-il vrai que l'enveloppe convexe des $\{A_i\}$ est isométrique à une partie de l'enveloppe convexe des $\{B_i\}$?

## SOLUTIONS

*Enoncé n° 22* (J. LAGRANGE — Reims)

Soit n et s deux entiers strictement positifs; $r_s(n)$ est le nombre de solutions dans Z de l'équation

$$(1) \qquad x_1^2 + x_2^2 + ... + x_s^2 = n \quad ;$$

autrement dit $r_s(n)$ est le nombre de décompositions de n en somme de s carrés.

Montrez que si $n$ est premier à $s$, $r_s(n)$ est divisible par $2s$.

*Exemple:* $r_3(1) = 6$

car

$$1 = 1^2 + 0 + 0 = (-1)^2 + 0 + 0 = 0 + 1^2 + 0 = \dots$$

*Solution de l'auteur:*

On écrit toutes les solutions de (1) et on les additionne. On obtient:

$$(2) \qquad \Sigma x_1^2 + \Sigma x_2^2 + \dots + \Sigma x_s^2 = s$$

$$x_1^2 = n\, r_s(n)$$

s étant premier à n, s divise $r_s(n)$. Comme $r_s(n)$ est pair, on en déduit que 2 s divise $r_s(n)$ si s est impair. Pour s pair, il faut raffiner un peu.

On écrit l'équation (1) sous la forme:

$$x_2^2 + \dots + x_s^2 = n - x_1^2$$

et on compte les équations pour lesquelles $x_1^2 = i^2$ ; i entier positif donné. Il y en a $r_{s-1}(n)$ pour $i = 0$ et $2\, r_{s-1}(n - i^2)$ pour $i > 0$.

On en déduit:

$$(3) \qquad \Sigma x_1^2 = 2 \sum_{i \geqslant 1} i^2\, r_{s-1}(n - i^2)$$

(2) et (3) donnent

$$2s \sum_{i \geqslant 1} i^2\, r_{s-1}(n - i^2) = n\, r_s(n)$$

Donc, pour 2s premier à n, 2s divise $r_s(n)$. Si s est premier à n et s pair, on a n impair et 2s est premier à n. La propriété est complètement démontrée.

*Enoncé n° 23* (M. BOURDEAU — Sheerbrooke — Québec)

Soit n un entier $\geqslant 6$. Si $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont des entiers $\geqslant 0$, on pose:

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} X^{a_k}$$

Si P(X) est identique à $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, alors

$$P(X) = (n-3) + 2X + X^2 + X^{n-3}$$

*Solution de Charles AUQUE* (Clermont)

Dans la relation et celle obtenue par dérivation faisons $X = 1$ ; on a

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = n+1 \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=0}^{n} i\,a_i = \sum_{i=0}^{n} a_i$$

Cette dernière peut s'écrire

$$a_0 = a_2 + 2a_3 + \ldots + (n-1)a_n$$

Posons $a_0 = p$, on a donc $a_p \geqslant 1$ et $p \geqslant (p-1)a_p$

*Cas 1* $\quad p > 2 \quad$ d'où $\quad a_p = 1$

mais

$$p = a_2 + 2a_3 + \ldots + (p-1)a_p + \ldots + (n-1)a_n$$

$$\Longrightarrow a_2 = 1 \quad a_i = 0 \quad \text{pour} \quad i \geqslant 3 \quad \text{et} \quad i \neq p$$

$$a_1 \leqslant 2 \quad \text{et} \quad a_1 \geqslant 2 \quad \text{donc} \quad a_1 = 2$$

$$p + 1 + 2 + 1 = n + 1 \quad \Longrightarrow \quad p = n - 3$$

Donc pour $n \geqslant 6 \qquad P_n(X) = n - 3 + 2X + X^2 + X^{n-3}$

*Cas 2* $\quad p = 2 \quad a_2 \geqslant 1 \quad$ d'où $\quad a_2 = 2 \quad a_3 = \ldots = a_n = 0$

Deux polynomes possibles :

$$a_1 = 1 \qquad P_n(X) = 2 + X + 2X^2 + 0.X^3 + 0.X^4$$
$$a_1 = 0 \qquad P_3(X) = 2 + 0.X + 2X^2 + 0.X^3$$

*Cas 3* $\quad p = 1 \quad a_2 = 1 \quad a_3 = \ldots = a_n = 0$

$$a_1 \leqslant 2 \quad \text{et} \quad a_1 \geqslant 2 \quad \text{donc} \quad a_1 = 2$$

Un polynome :

$$P_3' = 1 + 2X + X^2 + 0.X^3$$

*Autres solutions de:* Jean Paul FISCHER (Ecole Normale de Montigny-les-Metz); Bernard LANGER (C.P.R. Strasbourg); Madame MARTIN (Paris); J. SEVIN (E.N.G. Arras); VIDIANI (lycée Berthelot, Annecy) et l'auteur.

*Enoncé n° 24* (Communiqué par M. VIDIANI, Lycée Berthelot, Annecy)

Un sultan décide qu'après sa mort, les f femmes de son harem seront à partager entre ses m ministres de la façon suivante:
Le premier ministre choisira d'abord la plus belle femme puis le (1/k)ième de ce qui restera ensuite. Dans ce qui restera ensuite une fois que toutes les femmes du premier ministre auront été désignées, le deuxième ministre choisira les deux plus belles femmes et prendra le (1/k)ième de ce qui restera ensuite. De même, le troisième ministre choisira dans celles qui resteront les trois plus belles femmes puis prendra le (1/k)ième de ce qui restera, et ainsi de suite jusqu'au dernier ministre.
Quels sont les triplets (f, m, k) possibles ?

*Solution de R. CUCULIERE* (L.C.M. de Noisy-le-Sec):

D'après l'énoncé, f, m, k sont trois entiers tels que $f \geqslant 1$ , $m \geqslant 1$ , $k \geqslant 2$ .
(Si $k = 1$ , le triplet (f, m, k) est (f, 1, 1) ).
Il s'agit donc de trouver à quelle condition existe une suite $(f_n)_{1 \leqslant n \leqslant m}$ (suite des "parts" des "ministres") dont les termes sont des *entiers positifs*, telle que:

$$f_1 = 1 + \frac{1}{k}(f - 1)$$

$$f_2 = 2 + \frac{1}{k}(f - f_1 - 2)$$

..........................................

$$f_n = n + \frac{1}{k}(f - f_1 - \dots - f_{n-1} - n)$$

et ainsi de suite jusqu'à $f_m$ . On veut avoir de plus

$$f_1 + f_2 + \dots + f_m = f$$

Si on pose $S_0 = 0$ et, pour tout n tel que $1 \leqslant n \leqslant m$ ,

$$S_n = f_1 + f_2 + \dots + f_n$$

on doit avoir pour n quelconque compris entre 1 et m:

$$f_n = n + \frac{1}{k}(f - S_{n-1} - n) = \frac{k-1}{k}n - \frac{1}{k}S_{n-1} + \frac{f}{k}$$

Soit si $n \geqslant 2$ :

$$f_{n-1} = \frac{k-1}{k}(n-1) - \frac{1}{k}S_{n-2} + \frac{f}{k}$$

Donc

$$f_n - f_{n-1} = \frac{k-1}{k} - \frac{1}{k}(S_{n-1} - S_{n-2}) = \frac{k-1}{k} - \frac{1}{k}f_{n-1}$$

$$f_n = \frac{k-1}{k}f_{n-1} + \frac{k-1}{k}$$

$$f_n - (k-1) = \frac{k-1}{k}f_{n-1} + \frac{k-1}{k} - (k-1) = \frac{k-1}{k}[f_{n-m} + 1 - k]$$

La suite $n \longmapsto f_n - (k-1)$ est donc une suite géométrique, ce qui donne:

$$f_n - (k-1) = \left(\frac{k-1}{k}\right)^{n-1}(f_1 - (k-1))$$

$$f_n = \left(\frac{k-1}{k}\right)^{n-1}\frac{f-(k-1)^2}{k} + k-1$$

$$= \frac{[f-(k-1)^2]\,(k-1)^{n-1}}{k^n} + (k-1)$$

D'après le théorème de Gauss, $f_n$ sera entier pour tout $n$ ssi tous les $k^n$ divisent $f-(k-1)^2$,

soit s si: $\qquad k^m \mid f-(k-1)^2$

La suite convient ssi $\quad S_m = \sum_{n=1}^{m} f_n = f$ , soit :

$$\frac{f-(k-1)^2}{k}\,\frac{1-\left(\frac{k-1}{k}\right)^m}{1-\frac{k-1}{k}} + m(k-1) = f$$

$$[f-(k-1)^2]\left[1 - \frac{(k-1)^m}{k^m}\right] + m(k-1) = f$$

$$-(k-1)^2 + m(k-1) = [f-(k-1)^2]\,\frac{(k-1)^m}{k^m}$$

$$[m-(k-1)]\,k^{m} = [f-(k-1)^{2}]\,(k-1)^{n-1}$$

D'après le théorème de Gauss, il doit exister Q entier tel que

$$\begin{cases} m-(k-1) = Q\,(k-1)^{m-1} \\ f-(k-1)^{2} = Q\,k^{m} \end{cases}$$

Soit

$$\begin{cases} m = Q\,(k-1)^{m-1} + (k-1) \\ f = Q\,k^{m} + (k-1)^{2} \end{cases}$$

On distingue deux cas:

*Premier cas:* $k = 2$

$$m = Q+1 \quad , \quad Q = m-1 \quad , \quad f = (m-1)\,2^{m} + 1$$

On a $$f_n = \frac{f-1}{2^{n}} + 1 = (m-1)\,2^{m-n} + 1$$

parts décroissantes de

$$f_1 = (m-1)\,2^{m-1} + 1 \quad \text{à} \quad f_m = m\,,$$

le dernier "reste étant ainsi nul.

Donc ici

$$(f, m, k) = \big((m-1)\,2^{m} + 1\,,\, m,\, 2\big)$$

pour tout $m \in N^{*}$ .

*Deuxième cas:* $k \geqslant 3$

On sait que, pour tout entier naturel n on a $2^{n} > n$ . Donc si on avait $Q \geqslant 1$ , ceci impliquerait:

$$Q\,(k-1)^{m-1} > (k-1)^{m-1} \geqslant 2^{m-1} \geqslant m-1$$

et comme $k-1 \geqslant 2$ :

$$m = Q\,(k-1)^{m-1} + (k-1) > m-1+2 = m+1 \quad ,$$

ce qui n'est pas.

Donc $Q = 0$ et donc $m = k-1 \implies k = m+1$

$$f = (k-1)^{2} = m^{2}$$

Soit $(f, m, k) = (m^2, m, m+1)$

résultat encore valable, mais déjà trouvé, si $m = 1$.

Dans ce cas, toutes les parts sont égales à m. Ce partage est équitable (en quantité).

En conlusion, les triplets solutions (f, m, k) sont, quel que soit $m \in \mathbb{N}^*$ :

$$\left(1 + (m-1)\, 2^m, m, 2\right)$$
$$(m^2, m, m+1)$$

*Autres solutions de Jacques BERNARD* (Clermont), *J. BOULARD* (Paris), *E. KARAM et A. AKIKI* (Paris), *Melle SAMBARD* (Saint Quentin).

J. SEVIN (E.N.G. Arras) et l'auteur, qui pense que, son énoncé initial ayant été modifié, il n'est pas clair que le nombre de femmes soit épuisé à la fin et donnent une solution de ce nouveau problème, trop longue pour être reproduite ici. D'autre part, à propos de ce même problème, R. CUCULIERE nous adresse la lettre suivante:

Cher Collègue,

Je vous adresse ci-joint la solution du problème (n° 24 Bulletin A.P.M. numéro 286, page 995). Nous avons affaire ici à une généralisation du "problème de la succession" de Nicolas CHUQUET (15ème siècle). Voir par exemple "La mathématique des jeux" de M. KRAITCHIK (Gauthier-Villars, 1953) p. 29. Ce problème peut se poser de diverses manières. Par exemple étant donné un nombre a et un réel $\alpha$ tel que $0 < \alpha < 1$, des frères se partagent un héritage de sorte que le n-ième prend $na$ et $\alpha$ fois le reste. Dans ce cas, on trouve comme ici que la suite des parts est une suite géométrique plus une constante. Donc toutes les parts sont égales si deux parts sont égales. Et comme en tous cas le nombre de parts est un entier (même si on ne suppose pas, comme dans le problème A.P.M. 24, que les parts sont des nombres entiers), le problème n'est possible que si $\alpha = 1/k$. Si dans l'énoncé on suppose que *toutes* les parts sont égales, on a un problème du premier degré, qu'on peut poser en troisième pour varier l'ordinaire. Il suffit à nos chers petits d'écrire que les *deux* premières parts sont égales: ils trouvent ainsi la solution, mais sans percevoir clairement pourquoi l'égalité de ces deux premières parts implique l'égalité des autres, que l'on se borne à constater.

*Exemple:* des frères se partagent un héritage.

| | |
|---|---|
| Le premier prend | 1 000 F et 10 % du reste |
| Le second prend | 2 000 F et 10 % du nouveau reste |

et ainsi de suite.

Trouver l'héritage, le nombre de frères et la part de chacun, sachant que:
1) Tous les frères ont la même part
2) Deux des frères ont la même part
3) Mêmes questions avec 8% au lieu de 10%.

Un problème analogue a été posé avec $k = 7$ aux Olympiades Internationales (en 1967, je crois) et l'énoncé se trouve dans le Bulletin A.P.M., numéro 259. Dans l'énoncé on partageait des médailles, et non des femmes. Une petite remarque à ce sujet: les énoncés ne sont pas innocents. Je ne crois pas que ce soit très sympathique pour nos amis arabes de les prendre comme héros d'historiettes d'un goût douteux. J'ai enseigné deux ans en Algérie et ce pays, tourné vers le progrès, fait penser à bien d'autres choses que les éternelles grivoiseries sur les sultans, les harems et toute cette littérature douteuse.

Evidemment ceci n'ôte rien, au fond, à l'intérêt du problème et de la rubrique en général.

Cordialement.

*Enoncé n° 25* (A. BLANCHARD — Marseille)

Il n'est pas possible de répartir les entiers positifs en un nombre fini de progressions arithmétiques dont l'une soit de raison strictement supérieure aux raisons de toutes les autres.

*Solution de Philippe REVOY* (Université de Montpellier) :

A tout partie $\mathbf{E}$ de $\mathbf{N}$, nous attachons la fonction $f_E(x)$ définie par la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ où $a_n = 1$ si $n \in \mathbf{E}$ et $a_n = 0$ sinon.

Si E est une progression arithmétique,

$$E = an + b \quad n \geq 0 \qquad f_E(x) = \frac{x^b}{1 - x^a}$$

et si $E_1$ et $E_2$ sont deux parties disjointes de N,

$$f_{E_1 \cup E_2} = f_{E_1} + f_{E_2} .$$

Ainsi l'énoncé implique:

$$f_N = \frac{1}{1-x} = \sum_{r=1}^{k} \frac{x^{b_r}}{1 - x^{a_r}}$$

Il est clair alors que si $a_{k-1} < a_k$, $\exp\left(\frac{2i\pi}{a_k}\right)$ est pôle du second membre sans l'être du premier, d'où le résultat voulu.

Autres solutions de l'auteur.