Rubriques des problèmes de l'A.P.M.

Cette rubrique est pour le plaisir, pour celui qui nous fait choisir les mathématiques à vingt ans, et non directement pour notre enseignement.

Le niveau ne doit pas excéder celui des classes préparatoires ou des deux premières années de faculté. Un certain caractère d'originalité dans l'énoncé est souhaité, ce qui exclut, en particulier, les applications immédiates de théorèmes classiques, ou les problèmes déjà parus dans d'autres revues.

Si l'auteur d'un énoncé n'est pas en mesure d'en donner la solution, il doit accompagner son envoi du maximum d'informations concernant le problème, afin d'aider les responsables de la rubrique. Un astérisque signale un problème dont la solution n'est pas connue de ceux-ci. Le Bulletin publie les meilleures solutions.

Enoncés et solutions sur feuilles séparées et tapées à la machine S.V.P. N'oubliez pas de signer. Toute correspondance concernant la rubrique est à adresser à :

Charles AUQUE
Université de Clermont-Ferrand
Département de Mathématiques Pures
B.P. 45
63170 - AUBIERE

ENONCES

Les solutions des problèmes suivants doivent nous parvenir avant le 30 décembre 1974.

Enoncé n° 33 (J.G. HAGENDORF - Université de Provence)

Montrer qu'il existe une infinité non dénombrable de parties de N deux à deux non incluses.

Enoncé n° 34 (S. DUBUC - Université de Clermont-Ferrand)

Sur trois dés, on dispose 18 nombres distincts. On dresse la liste des sommes distinctes que l'on peut obtenir en lançant ces trois dés. Quelle est la longueur de la plus petite liste que l'on peut former après le choix approprié des 18 nombres ?

Enoncé n° 35 (C. RADOUX - I.E.T.E. LIBRAMONT)

Soit p un nombre premier $\geqslant 3$.

Si $\left(\frac{k}{p}\right)$ est le symbole de Legendre pour le caractère quadratique de k modulo p, démontrer que :

A. $n > \frac{p-1}{2} \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \left(\frac{k}{p}\right) C_n^k \equiv 0 \pmod{p}$

B. $\forall\ x \in \mathbb{Z},\ \sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}} (-1)^k C_{\frac{p-1}{2}}^k \left(\frac{x-k}{p}\right) \equiv \left(\frac{p-1}{2}\right)! \pmod{p}$

SOLUTIONS

Enoncé n° 28 (G. COLLOMBAT - Chambéry)

Soit a et b des naturels, avec $0 \leqslant a \leqslant b$. On considère une famille $\mathcal{F}$ de parties d'un ensemble E, toutes de cardinalité b, telle que si A et B sont dans $\mathcal{F}$, si $|A \cap B| \geqslant a$, $P \subset A \cup B$ et $|P| = b$, alors P est dans $\mathcal{F}$.

(Exemple : $\mathcal{F}$ ensemble de triplets de points alignés dans l'espace, $a = 2$). Montrer que si A, B et C sont dans $\mathcal{F}$, si $|A \cap C| \geqslant a$, $|B \cap C| \geqslant a$, $P \subset A \cup B \cup C$ et $|P| = b$, alors P est dans $\mathcal{F}$.

Solution (A. Blanchard, Université de Provence, Marseille)

Appelons "blocs" les éléments de $\mathcal{F}$. On va montrer la propriété suivante, un peu plus générale que la propriété demandée par l'énoncé : *Soit C' la réunion des blocs qui rencontrent C chacun en au moins a points ; alors toute partie à b éléments de C' est un bloc.*

Observons d'abord que c'est trivial si $a = b$, car dans ce cas $C' = C$. Supposons maintenant $a < b$; on montrera que si P est une partie à b éléments de C' alors P est un bloc, par récurrence sur le nombre d'éléments de $P - C$ (on désigne bien entendu par $E - F$ l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à F).

1) Si $P - C$ est vide, $P = C$ et P est un bloc.

2) Si $P - C$ n'a qu'un élément, celui-ci appartient à un bloc X rencontrant C en au moins a éléments, $P \subset X \cup C$ et il suffit d'appliquer l'hypothèse.

3) Si $P - C$ possède n éléments ($n \geqslant 2$) avec l'hypothèse de récurrence : *toute partie à b éléments de C' n'ayant pas plus de $n-1$ points en dehors de C est un bloc,* choisissons deux points distincts x et y de $P - C$, ainsi qu'un point u de $C - P$ et soit $P_x = P \cup \{u\} - \{x\}$, $P_y = P \cup \{u\} - \{y\}$.

Les ensembles P_x et P_y sont des blocs d'après l'hypothèse de récurrence ; l'intersection $P_x \cap P_y$ possède $b-1$ points donc au moins a points, et par suite P qui est une partie à b éléments de $P_x \cup P_y$ est un bloc.

Autres solutions :

J. SEVIN (Arras), A. PHILIPPE (Grenoble), M.C. MASSE (Confolens).

C. AUQUE (Clermont-Ferrand) avait fourni à l'auteur une première solution.

Enoncé n° 29 (G. COLLOMBAT - Chambéry)

Soit $H_1, \ldots, H_n$ des hyperplans de l'espace réel affine de dimension p tels que si $t \leqslant p+1$, l'intersection de t quelconques de ces hyperplans soit une variété linéaire de dimension $p-t$ (donc vide pour $t = p+1$). L'hyperplan affine H_i limite deux demi-espaces ouverts H_i^+ et H_i^-. Les signes $\epsilon_i = \pm$ étant aléatoires, indépendants et de même loi définie par :

$$P_r\ (\epsilon_i = +) = P_r\ (\epsilon_i = -) = \frac{1}{2},$$

montrer que

$$P_r\left(\bigcap_{i=1}^{n} H_i^{\epsilon_i} \neq \phi\right) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{p} C_n^k .$$

Solution (J. SEVIN, Arras)

Il y a 2^n intersections $H_1^{\epsilon_1} \cap H_2^{\epsilon_2} \cap \ldots \cap H_n^{\epsilon_n}$; toute intersection non vide sera appelée "région de type p". On dénombre R_n^p régions de type p. Etant donné la loi de probabilité des ϵ_i, on a

$$P_r\left(\bigcap_{i=1}^{n} H_i^{\epsilon_i} \neq \phi\right) = \frac{1}{2^n} \times R_n^p$$

On remarquera que toute région est convexe.

1) $p = 2$. Soit la situation donnée par $H_1, H_2, \ldots, H_{n-1}$. La droite H_n est coupée par $H_1, H_2, \ldots, H_{n-1}$ en $(n-1)$ points distincts, ce qui détermine sur H_n n régions de type 1, disjointes, chacune d'entre elles partageant une région de type 2 en deux (vu la convexité). On a donc $R_n^2 = R_{n-1}^2 + n$. Comme $R_1^2 = 2$, il vient $R_n^2 = 2+2+3+4+ \ldots + (n-1) + n = 1 + \sum_{i=1}^{n} i = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$ et pour $n \geqslant 2$, on a $1 + \frac{n(n+1)}{2} = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2$.

2) $p > 2$. H_n est une variété affine de dimension $(p-1)$ qui est "coupée" par $H_1, H_2, \ldots, H_{n-1}$ selon $(n-1)$ variétés affines de dimension $(p-2)$, lesquelles déterminent dans H_n (espace affine de dimension $(p-1)$), R_{n-1}^{p-1} régions de type $(p-1)$, chacune d'entre elles partageant une région de type p en deux.

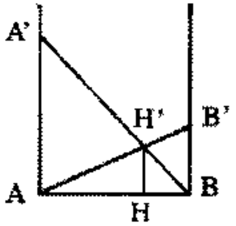
Alors, $R_n^p = R_{n-1}^p + R_{n-1}^{p-1}$

$$\begin{aligned} \text{d'où } R_n^p &= C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + \ldots + C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p \\ &\quad + C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + \ldots + C_{n-1}^{p-2} + C_{n-1}^{p-1} \\ &= \sum_{i=0}^{p} C_n^i \ \text{(vu la relation } C_r^s = C_{r-1}^s + C_{r-1}^{s-1}) \end{aligned}$$

Autre solution, de l'auteur.

Enoncé n° 30 (F. POLVECHE - Nevers)

Deux échelles de longueurs respectives 2m et 3m s'appuient simultanément et de façon alternée sur deux murs verticaux et parallèles. Les extrémités basses s'appuient sur un sol horizontal. Ces échelles "se coupent" (en vue de profil) à 1m du sol. Quel est l'écartement des deux murs ?



Pour l'étude du cas général, on pose :

$AB = c$ $\qquad$ $A'B = a$

$AB' = b$ $\qquad$ $HH' = h$

$AA' = x$ $\qquad$ et $\qquad$ $BB' = y$

Les relations du problème s'écrivent

$$\frac{h}{x} + \frac{h}{y} - 1 = 0 \; ; \; a^2 = x^2 + c^2 \; ; \; b^2 = y^2 + c^2$$

I — *Solution graphique* (C. AUQUE - Clermont-Ferrand)

On cherche les points M (x, y) communs aux deux hyperboles

$H_1 \equiv x^2 - y^2 - a^2 + b^2 = 0$ et $H_2 \equiv xy - h(x + y) = 0$.

Il apparaît, sous l'hypothèse $a^2 - b^2 > 0$ et $h > 0$, deux points réels dont un seul vérifie $x > 0$.

c réel $x \leqslant a \iff$ le point de coordonnées (a, b) est intérieur à $H_2 \iff \frac{1}{h} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

II — *Solution algébrique résumée*

$$C_\lambda \equiv H_1 + 2\lambda H_2 \equiv (x + \lambda y - \lambda h)^2 - (\lambda^2 + 1)\left[y - \frac{\lambda(\lambda - 1)h}{\lambda^2 + 1}\right]^2 + b^2 - a^2 - 2\frac{\lambda^3 h^2}{\lambda^2 + 1}$$

Pour résoudre $2\lambda^3 h^2 + (a^2 - b^2)\lambda^2 + a^2 - b^2 = 0$, on pose classiquement $\frac{1}{\lambda} = u + v$. u^3 et v^3 sont les racines de $X^2 + \frac{2h^2}{a^2 - b^2} X - \frac{1}{27} = 0$.

$$\text{D'où } \frac{1}{\lambda} = \sqrt[3]{\frac{-h^2}{a^2 - b^2} + \sqrt{\frac{h^4}{(a^2 - b^2)} + \frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-h^2}{a^2 - b^2} - \sqrt{\frac{h^4}{(a^2 - b^2)} + \frac{1}{27}}}$$

Pour cette unique valeur réelle de λ, C_λ se décompose en deux droites. Il faut prendre la droite de pente positive d'après l'étude graphique. En coupant $H_2 = 0$ par

$$x + \lambda y - \lambda h = \sqrt{\lambda^2 + 1}\ \left[y - \frac{\lambda(\lambda-1)h}{\lambda^2 + 1}\right],$$

on obtient une équation du second degré en y ayant deux racines positives. Il faut choisir la plus grande d'après l'étude graphique. On a ainsi la valeur de y puis $c = \sqrt{b^2 - y^2}$ donne la distance de A à B.

III — *Résolution par itérations de l'exemple numérique* (J. LEGRAND, Bordeaux)

En éliminant x et y entre $x + y = t$, $xy = t$, $x^2 - y^2 = 5$, on obtient $t = \varphi(t)$ où $\varphi(t) = 4 + \dfrac{25}{t^3}$.

L'étude de la fonction $t \longmapsto \varphi(t)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ montre que l'équation en t admet une solution unique t_o qu'on encadre par la suite $x_n = \varphi(x_{n-1})$ avec x_o arbitraire.

On trouve $4{,}311 < t_o < 4{,}313$ et la formule

$$d^2 = \frac{1}{2}\ \left[13 + 2\,t_o - t_o^2\right].$$

donne $1{,}228 < d < 1{,}234$.

Autre solution :

R. CUCULIERE (Noisy-le-Sec).

R. MAILLARD renvoie au problème de Baccalauréat 1970, groupe I.

P. LABERENNE fait remarquer la mauvaise rédaction de l'énoncé.