2

RUBRIQUES DE L'A.P.M.E.P.

Problèmes

Cette rubrique est pour le plaisir, celui qui nous fait choisir les mathématiques à vingt ans et non directement pour notre enseignement.

Le niveau ne doit pas excéder celui des classes préparatoires ou des deux premières années de faculté. Un certain caractère d'originalité dans l'énoncé est souhaité, ce qui exclut, en particulier, les applications immédiates de théorèmes classiques, ou les problèmes déjà parus dans d'autres revues.

Si l'auteur d'un énoncé n'est pas en mesure d'en donner la solution, il doit accompagner son envoi du maximum d'informations concernant le problème, afin d'aider les responsables de la rubrique. Un astérisque signale un problème dont la solution n'est pas connue de ceux-ci. Le Bulletin publie les meilleures solutions.

Enoncés et solutions sur feuilles séparées et tapées à la machine S.V.P. N'oubliez pas de signer. Toute correspondance concernant la rubrique est à adresser à :

Charles AUQUE
Université de Clermont-Ferrand
Mathématiques Pures
B.P. 45 - 63170 AUBIERE

Enoncé n° 36 (E. Ehrhart, Strasbourg).

Si deux progressions, l'une arithmétique, l'autre géométrique, illimitées, à termes entiers et de raisons premières entre elles ont un terme commun, elles ont une infinité de termes communs.

Enoncé n° 37 (J. Legrand, Bordeaux).

Pour quelles bases de numération existe-t-il un chiffre $c \neq 0$ tel que le carré du nombre écrit cc s'écrive aabb ?

Pour quelles bases la solution est-elle unique ?

La rubrique attend toujours des estimations pour le problème n° 19 (Bulletin n° 284) et des solutions pour les problèmes 26 et 27 (Bulletin n° 287).

Solutions

Enoncé n° 8 (Marcel Soum, lycée d'Arcachon).

Construire un triangle ABC connaissant les pieds I,J,K des trois bissectrices intérieures (respectivement extérieures).

Solution (Ch. Auque, Clermont-Ferrand).

I *Cas des bissectrices extérieures.*

Les pieds des bissectrices extérieures étant alignés, on considère trois points I,J,K alignés (dans cet ordre pour simplifier la discussion).

AI est bissectrice de JAK donc $\frac{AJ}{AK} = \frac{IJ}{IK}$ et A appartient au cercle α de diamètre II′ où I′ est le conjugué harmonique de I par rapport à J et K.

De plus A est distinct de I et I′.

On introduit de la même façon les cercles β et γ .

Soit A un point de α distinct de I et I′ ; C est nécessairement sur la demi-droite d'origine J passant par A et sur le cercle γ . Or ces deux courbes se coupent en un point unique (soit C) car J est intérieur à γ .

AK coupe IC dans le demi-plan limité par la droite IJK contenant A, en un point B, car I,K′, I′,K sont alignés dans cet ordre.

Le triangle est dégénéré si et seulement si A appartient au cercle γ .

Sinon, AI et CK sont bien les bissectrices extérieures en A et C, et la bissectrice extérieure en B coupe AC en un point aligné avec I et K, donc en J.

Il y a ainsi une infinité de solutions, le lieu du sommet A, permettant la construction (alors unique) du triangle ABC, est le cercle α privé de I,I′ et des deux intersections de α et γ .

Remarque : l'autre intersection de la droite AJ et du cercle γ amène à un triangle où I,J K sont les pieds de deux bissectrices intérieures et d'une bissectrice extérieure.

II *Cas des bissectrices intérieures.*

Définissons les côtés BC, CA, AB du triangle cherché par les points I,J,K (donnés non alignés) et par des vecteurs directeurs (inconnus) de même norme non nulle, U,V,W respectivement.

On exprime que I,J et K sont sur des bissectrices (intérieures ou extérieures) par :

$$\vec{IJ} \wedge V = \epsilon \vec{IK} \wedge w \; ; \; \vec{JK} \wedge W = \epsilon' \vec{JI} \wedge U \text{ et } \vec{KI} \wedge U = \epsilon'' \vec{KJ} \wedge V \; ;$$

$\epsilon, \epsilon', \epsilon''$ valant 1 ou -1.

En remplaçant U par $\epsilon' U$ et V par $\epsilon'\epsilon'' V$, on peut supposer $\epsilon' = \epsilon'' = 1$.

$\epsilon = -1$ est impossible. En effet, les formules donnent :

$$\vec{JI} \wedge U = \vec{JI} \wedge W + \vec{IK} \wedge W = \vec{JI} \wedge W + \vec{JI} \wedge V$$

$$\text{et } \vec{KI} \wedge U = \vec{KI} \wedge V + \vec{IJ} \wedge V = \vec{KI} \wedge V + \vec{KI} \wedge W.$$

$$\text{D'où } U = V + W.$$

En posant $\vec{IJ} = xV + yW$ et $\vec{IK} = zV + tW$, la première formule donne $y = z$. Mais alors le point M défini par $\vec{IM} = y(V + W)$ appartient aux trois côtés.

On suppose donc $\epsilon = 1$.

Posons $U = U' + U''$ où U' et U'' sont colinéaires à $\vec{IJ}$ et $\vec{IK}$ respectivement.

Faisons de même avec V (respectivement W) en utilisant les vecteurs $\vec{JK}$ et $\vec{JI}$ (respectivement $\vec{KI}$ et $\vec{KJ}$).

$$\vec{IJ} \wedge V = \vec{IJ} \wedge V' \text{ et } \vec{IK} \wedge W = \vec{IK} \wedge W'' = (\vec{IJ} + \vec{JK}) \wedge W'' = \vec{IJ} \wedge W''.$$

La première formule exprime que $V' - W''$ est colinéaire à $\vec{IJ}$, ce qui, compte tenu du fait que $V' - W''$ est colinéaire à $\vec{JK}$, est équivalent à $V' = W''$.

Les deux autres formules donnent de même (par permutation) $W' = U''$ et $U' = V''$.

Les trois autres côtés concourent si et seulement si il existe x tel que

$$(\vec{JI} + xU) \wedge V = 0 \text{ et } (\vec{KI} + xU) \wedge W = 0 \; ;$$

c'est-à-dire si et seulement si $\vec{JI} \wedge V = 0$ ou $U \wedge V = U \wedge W$.

La première s'écrit $V' = 0$ et la deuxième $0 = (U' + W') \wedge (U' - W') = -2U' \wedge W'$.

La condition de concours est donc que U', V' ou W' soit nul.
Le problème est donc de construire trois vecteurs non nuls U', V' et W' portés par IJ, JK et KI tels que $U'+W'$, $V'+U'$ et $W'+V'$ aient même norme.
I,J et K seront des pieds de bissectrices, mais pas nécessairement les pieds des bissectrices intérieures.

On a une solution analytique en posant $U'=X\vec{IJ}$, $V'=Y\vec{JK}$ et $W'=T\vec{KI}$.
$(X\vec{IJ}+T\vec{KI})^2 = (Y\vec{JK}+X\vec{IJ})^2 = (T\vec{KI}+Y\vec{JK})^2$ s'interprète comme l'intersection de deux coniques en coordonnées homogènes.

On a une solution plus géométrique en fixant $U'=\vec{IJ}$, en introduisant le point L tel que $\vec{LK}=\vec{IJ}$, en définissant M par $\vec{KM}=V'$, N par $\vec{KN}=W'$ et en désignant par P le milieu de MN.
Les conditions s'écrivent $LM = LN = 2KP$.
Le lieu du point P tel que $LM = LN$ est une hyperbole équilatère.
Le lieu du point P tel que $LM^2+LN^2 = 8KP^2$ est une conique.
Les intersections fournissent une construction rapide du triangle.

Autres solutions :

H. Adad, professeur honoraire au lycée Saint-Louis, qui en outre approfondit les cas particuliers IJK isocèle et IJK rectangle.

R. Guillotin à Coulaines.

Enoncé n° 13 (E. Ehrhart, Strasbourg).

A et B étant deux corps convexes tels que $A \subset B$, montrer que l'aire de la surface qui limite A est inférieure à celle de B.

Solution de l'auteur

Tout corps convexe peut être considéré comme cas limite d'un polyèdre convexe. Il suffit de démontrer la proposition pour un polyèdre convexe P entourant un polyèdre convexe Q à n faces.
Le plan d'une face de Q partage P en deux polyèdres convexes dont P_1, situé du même côté que Q, a une aire inférieure à celle de P.
En répétant l'opération avec P_1 et une autre face de Q, on obtient un polyèdre P_2 d'aire inférieure à celle de P_1, et ainsi de suite.
Or le dernier polyèdre ainsi construit est le polyèdre Q lui-même.

Enoncé n° 31 (A. Adler, Paris).

Soit un polygone convexe possédant un nombre impair de sommets, n. On trace toutes les diagonales, décomposant ainsi le polygone en polygones partiels. Démontrer qu'aucun des polygones de décomposition ne peut avoir plus de n côtés et que, s'il existe un polygone de n côtés, celui-ci est unique.

Solution de l'auteur.

Par un sommet du polygone donné P passent, au maximum, deux côtés d'un polygone de décomposition ; il en résulte qu'il ne peut exister de polygone de décomposition de plus de n côtés et que si celui-ci existe il correspond à une permutation des sommets du polygone P, deux sommets consécutifs étant joints par une diagonale.

Soit alors un polygone de décomposition de n côtés ; soit un de ses côtés qui passe par les sommets a et r du polygone P ; étant donné que ce côté ar doit couper tous les autres côtés du polygone de décomposition à l'intérieur du polygone convexe, la permutation des sommets est telle que, à part les côtés aboutissant en a et r, tous les autres doivent traverser ar ; si nous retirons ar et les côtés aboutissant en a et r, il reste n—4 sommets, nombre impair. Montrons que le successeur de a et l'antécédent de r sont sur le même demi-polygone découpé par ar ; sinon le nombre des sommets situés sur chaque demi-polygone devrait être le même, ce qui est impossible puisque n est impair. Donc ces deux points sont situés sur le même demi-polygone et l'un des demi-polygones contient $\frac{n-1}{2}$ sommets tandis que l'autre en contient $\frac{n-3}{2}$. Nous obtenons ainsi la construction de polygone de décomposition possédant n côtés, s'il existe. On range les sommets dans l'ordre cyclique et on les joint de $\frac{n-1}{2}$ en $\frac{n-1}{2}$. Il résulte de là que le polygone de décomposition, de n côtés, s'il existe, est unique. D'autre part, si le polygone est régulier on voit que le polygone de décomposition existe bien.

Complément. Si n est pair il n'existe pas de polygone de décomposition possédant plus de n—1 côtés ; il peut exister plusieurs polygones de décomposition de n—1 côtés. Il serait intéressant de chercher le maximum du nombre de ces polygones de décomposition de n—1 côtés.

Enoncé n° 32 (I.R.E.M. de Strasbourg).

Soit deux familles finies $\{A_i\}$ et $\{B_i\}$ $i \in \{1, 2, ..., n\}$ de points d'un espace euclidien telles que pour tout

$\{i, j\} \subset \{1, 2, ..., n\}$ on ait $\|A_i A_j\| \leqslant \|B_i B_j\|$. Est-il vrai que l'enveloppe convexe des A_i est isométrique à une partie de l'enveloppe convexe des B_i ?

Solution (D. Reisz, Auxerre).

Soit A_1, A_2 et A_3 les sommets d'un triangle équilatéral de côté 1.
L'enveloppe convexe des A_i est le triangle équilatéral $A_1 A_2 A_3$ (considéré comme partie du plan).
Soit, par ailleurs, B_1, B_2 et B_3 trois points alignés dans cet ordre et tels que $B_1 B_2 = B_2 B_3 = 2$.
L'enveloppe convexe est le segment $B_1 B_3$.
Or le triangle $A_1 A_2 A_3$ n'est isométrique à aucune partie du segment $B_1 B_3$.
La propriété n'est donc pas toujours vraie.

Autre solution de l'auteur.