Rubrique des problèmes de l'A.P.M.

Cette rubrique est pour le plaisir, celui qui nous fait choisir les mathématiques à vingt ans, et non directement pour notre enseignement.

Le niveau ne doit pas excéder celui des classes préparatoires ou des deux premières années de faculté. Un certain caractère d'originalité dans l'énoncé est souhaité, ce qui exclut, en particulier, les applications immédiates de théorèmes classiques, ou les problèmes déjà parus dans d'autres revues.

Si l'auteur d'un énoncé n'est pas en mesure d'en donner la solution, il doit accompagner son envoi du maximum d'informations concernant le problème, afin d'aider les responsables de la rubrique. Un astérisque signale un problème dont la solution n'est pas connue de ceux-ci. Le Bulletin publie les meilleures solutions.

Enoncés et solutions sur feuilles séparées et tapées à la machine S.V.P. N'oubliez pas de signer. Toute correspondance concernant la rubrique est à adresser à :

Charles AUQUE
Université de Clermont-Ferrand
Mathématiques Pures
B.P. 45 - 63170 AUBIERE

ENONCES

ENONCE N° 41 (E.EHRHART, Strasbourg).

Les inconnues x, y et le paramètre n étant des naturels strictement positifs, combien de solutions a le système $2x-y < 3n$, $x < n(x-y)$?

ENONCE N° 42 (M. ADLER, Paris).

On donne deux suites constituées, chacune, de n naturels. On définit un algorithme consistant à remplacer chaque nombre d'une suite par le nombre d'éléments de l'autre suite qui ont un indice strictement inférieur et qui sont inférieurs à lui.

Démontrer qu'au bout d'un nombre fini d'applications de cet algorithme, on obtient deux suites stables.

Etant donnée une suite quelconque, peut-on lui associer une seconde suite de manière que l'ensemble des deux suites soit stable ?

ENONCE N° 43 (C. AUQUE, Clermont-Ferrand).

Déterminer les naturels n tels que n divise C_{2n-3}^{n-2}.

Les solutions doivent nous parvenir avant le 30 Juillet 1975.

SOLUTIONS

J'ai reçu après les délais (sans doute en raison de la grève des postes) les solutions de :

M. BLEVOT (Chauny), G. COLLOMBAT (ENIT Tunisie) et Y. GRIMALDI (Amiens) au problème n° 33.

Y. GRIMALDI (Amiens) et R. QUENTON (Madrid) au problème n° 34.

J. LEGRAND (Bordeaux) et P. LIARDET (Marseille) au problème n° 35.

Enoncé n° 36 (E. EHRHART, Strasbourg).

Si deux progressions, l'une arithmétique, l'autre géométrique, illimitées, à termes entiers et de raisons premières entre elles ont un terme commun, elles ont une infinité de termes communs.

Solution : (G. COQUET, Valenciennes)

Soit a un entier commun aux deux progressions ($a > 0$), r la raison de la progression arithmétique ($r \geqslant 1$), q la raison de la progression géométrique ($q > 1$).

Il suffit de montrer qu'il existe deux entiers $m \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$ tels que $q^m = 1 + nr$. En effet, on a alors $aq^m = a + (na)r$; il suffit ensuite d'itérer le raisonnement.

Montrons la propriété précédente.

Pour tout entier $i \geqslant 1$, il existe un entier k_i avec $0 \leqslant k_i < r$ tel que $q^i \equiv k_i \pmod r$. (On peut d'ailleurs remarquer que $k_i \neq 0$ si $r > 1$). Les entiers $k_1, k_2, \ldots, k_{r+1}$ étant tels que, pour $1 \leqslant i \leqslant r+1$, on ait $0 \leqslant k_i < r$, il existe deux entiers i et j tels que :

$$1 \leqslant i < j \leqslant r+1 \quad \text{et} \quad k_i = k_j.$$

On a donc $q^j \equiv q^i \pmod r$, d'où $q^i(q^{j-i} - 1) \equiv 0 \pmod r$.

Puisque q et r sont premiers entre eux, il en est de même de q^i et r. D'après le théorème de Gauss, on en déduit que $q^{j-i} \equiv 1 \pmod r$, c.q.f.d.

N.D.L.R. Les conditions $1 \leqslant r$ et $1 < q$ auraient dû figurer dans l'énoncé.

Autres solutions :

R. CUCULIERE (IREM Paris-Nord), R. GRAS (IREM Rennes), A. TISSIER (Neuilly-sur-Marne) et l'auteur.

Enoncé n° 37 (J. LEGRAND, Bordeaux).

Pour quelles bases de numération existe-t-il un chiffre $c \neq 0$ tel que le carré du nombre écrit cc s'écrive aabb ?

Pour quelles bases la solution est-elle unique ?

N.D.L.R. Ce problème n'était pas inédit. G. THOVERT a publié dans le Bulletin de la Régionale de Lyon de l'A.P.M.E.P. n° 10 de Novembre 1973 une étude complète de l'équation $aabb = (cc)^2$.

Solution : (A. TISSIER, Neuilly-sur-Marne)

Soit N la base de numération. On cherche les naturels c tels que $1 \leqslant c \leqslant N - 1$ et qu'il existe un couple de naturels (a, b) tels que $a \leqslant N - 1$, $b \leqslant N - 1$ et $[(c(N + 1)]^2 = (aN^2 + b)(N + 1)$.

Soit (c, a, b) une solution. Alors $c^2(N+1) = aN^2 + b$; comme $N^2 \equiv 1\ (N+1)$, $a + b \equiv 0\ (N+1)$; comme $0 < a + b < 2N$, $a + b = N + 1$; donc $2 \leqslant a \leqslant N - 1$ et $b = N + 1 - a$.

On en déduit $c^2 = a(N-1) + 1$ et $c^2 \equiv 1\ (N-1)$.

On ne peut avoir $c = N - 1$; d'autre part $\dfrac{c^2 - 1}{N-1} > 1$ donc $\sqrt{N} < c \leqslant N - 2$.

Il y a autant de solutions du problème que de solutions à :

$$\begin{cases} x^2 \equiv 1 \quad (N-1) \\ \sqrt{N} < x \leqslant N - 2 \end{cases}$$

* si $\sqrt{N} \geqslant N - 2$ soit $N \leqslant 4$, aucune solution.

* si $\sqrt{N} < N - 2$ soit $N \geqslant 5$, il y a au moins une solution :

$$\boxed{c = N - 2 \ , \ a = N - 3 \ , \ b = 4} \qquad N \geqslant 5$$

Recherche des autres solutions (Posons $N = M + 1$, $M \geqslant 4$)

(Cette étude est quasi-immédiate si on utilise les structures des groupes (cycliques ou non) multiplicatifs de Z/MZ ; cf. Warusfel : "Structures Algébriques Finies" ; cherchons ici une méthode directe).

($A \wedge B$ signifie P.G.C.D. de A et de B).

Remarquons que si $1 \leqslant x \leqslant M - 1$, alors x ou $M - x$ dépasse $\sqrt{N}$ pour $N \geqslant 5$.

Par conséquent, les naturels $N \geqslant 5$ tels que le problème n'a qu'une seule solution sont ceux pour lesquels le groupe multiplicatif $G(M)$ de Z/MZ n'a que deux racines carrées de $\overline{1}$: $-\overline{1}$ et $\overline{1}$. Cherchons donc ces naturels M :

1) *Si M est premier $\geqslant 5$*, $G(M)$ est le groupe multiplicatif d'un corps et par suite $\overline{x}^2 = \overline{1}$ n'a que deux racines dans $G(M)$.

2) *Si M est tel qu'il existe (A,B) tels que $A \wedge B = 1$, $M = AB$, $A \geqslant 3$, $B \geqslant 3$* : dans $G(M)$, il y a d'autres solutions de $\overline{x}^2 = \overline{1}$ que ± 1 : en effet, d'après le théorème chinois,

$\begin{cases} x \equiv 1\ (A) \\ x \equiv -1\ (B) \\ 1 \leqslant x < AB \end{cases}$ a une et une seule solution c ; $c \neq 1$ car $1 \not\equiv -1\ (B)$ et $c \neq AB - 1$ car $-1 \not\equiv 1\ (A)$. Donc $\overline{c} \neq \pm \overline{1}$. c.q.f.d.

3) *Si $M = p^K$ où p est premier impair, $K \geqslant 2$:* soit $\bar{\bar{x}}$ dans G(M) tel que $\bar{x}^2 = \bar{1}$. $x^2 \equiv 1$ (p), donc $x \equiv \pm 1$ (p) ; changeant éventuellement x en $-x$, on peut supposer $x \equiv 1$ (p) ; $x = p^{\ell}y + 1$ avec $1 \leqslant \ell$ et $y \wedge p = 1$.

Donc $x^2 = 1 + 2yp^{\ell} + p^{2\ell}y^2 \equiv 1$ (p^K). Si $\ell \geqslant K$, $\bar{x} = \bar{1}$; si $\ell < K$, alors $2y + p^{\ell}y^2 \equiv 0$ ($p^{K-\ell}$), $2y \equiv 0$ (p) ce qui est impossible. Donc $\bar{x} = \bar{1}$. Ceci prouve que $\bar{1}$ n'a que deux racines carrées mod M.

4) *Si $M = 2p^k$, p premier impair, $K \geqslant 1$:*

Soit $\bar{\bar{x}}$ dans G(M) tel que $\bar{x}^2 = \bar{1}$. En changeant éventuellement x en $-x$, on peut toujours supposer que $x = p^{\ell}y + 1$ avec $\ell \geqslant 1$, $y \in \mathbf{Z}$, $y \wedge p = 1$.

y est pair, sinon $x \equiv 0$ (2) $\bar{x}^2 \equiv \bar{1}$ (2). Donc $x = 2p^{\ell}z + 1$ avec $\ell \geqslant 1$, $z \in \mathbf{Z}$, $z \wedge p = 1$. Si $\ell \geqslant K$, $\bar{x} = \bar{1}$.

Si $\ell < K$, $\bar{x}^2 = \bar{1} = \bar{1} + \bar{4}\bar{p}^{\ell}\bar{z} + \bar{4}\bar{p}^{2\ell}\bar{z}^2$. Donc

$4z + 4p^{\ell}z^2 \equiv 0$ ($p^{K-\ell}$) ; $p|4z$, ce qui est impossible donc $\bar{x} = \bar{1}$. Même résultat que 3).

5) *Si $M = 2^K$, $K \geqslant 3$:*

Posons $x = 2^{K-1} + 1$; $1 < x < M - 1$ et $\bar{x}^2 = \bar{2}^{2K-2} + \bar{2}^K + \bar{1} = \bar{1}$ car $K \geqslant 2$. c.q.f.d. Même résultat qu'en 2).

En résumé, les naturels N tels qu'en base N le problème a une et une seule solution sont :

1) les puissances de premiers impairs augmentées de 1 et au moins égales à 5 ;

2) les doubles de puissances de premiers impairs augmentés de 1.

9 est donc la plus petite base pour laquelle le problème a plus d'une solution :

$55 \longmapsto 3377$

$77 \longmapsto 6644$

Ensuite vient 13 pour lequel existent trois solutions :

a	b	c
2	12	5
4	10	7
10	4	11

Autres solutions :

H. ADAD (Sceaux), R. CUCULIERE (IREM Paris-Nord), J. LEFORT (Colmar), l'auteur et, rappelons-le, G. THOVERT.