6

RUBRIQUES DE L'A.P.M.E.P.

Rubrique des problèmes de l'A.P.M.

Cette rubrique est pour le plaisir, celui qui nous fait choisir les mathématiques à vingt ans, et non directement pour notre enseignement.

Le niveau ne doit pas excéder celui des classes préparatoires ou des deux premières années de faculté. Un certain caractère d'originalité dans l'énoncé est souhaité, ce qui exclut, en particulier, les applications immédiates de théorèmes classiques, ou les problèmes déjà parus dans d'autres revues.

Si l'auteur d'un énoncé n'est pas en mesure d'en donner la solution, il doit accompagner son envoi du maximum d'informations concernant le problème, afin d'aider les responsables de la rubrique. Un astérisque signale un problème dont la solution n'est pas connue de ceux-ci. Le Bulletin publie les meilleures solutions.

Enoncés et solutions sur feuilles séparées et tapées à la machine S.V.P. N'oubliez pas de signer. Toute correspondance concernant la rubrique est à adresser à :

Charles AUQUE
Université de Clermont-Ferrand
Mathématiques Pures
B.P. 45 - 63170 AUBIERE

ENONCES

Enoncé n° 44 (A. BLANCHARD, Université de Provence, Marseille).

Déterminer les naturels m et n tels que $|19^m - 2^n|$ soit un carré.

Enoncé n° 45 (ADLER, Paris).

Soit P un polygone plan non convexe. On prend l'enveloppe convexe de ses sommets ; soit AB un segment de cette enveloppe convexe qui n'est pas entièrement un segment de P ; A et B divisent le polygone P en deux parties ; on prend la symétrique de l'une de ces parties par rapport au milieu de AB ; elle détermine, avec l'autre partie, un nouveau polygone P'.

Si P' est convexe, on achève l'algorithme, sinon on applique la même méthode au polygone P'. Démontrer qu'au bout d'un nombre fini d'opérations on obtient un polygone convexe.

SOLUTIONS

Solutions reçues après la composition de l'article du n° 298 :

Enoncé n° 36 : CHEVREAU (Quito), LEGRAND (Bordeaux), SAMBARD (Saint-Quentin) et VAUTTIER (Saint-Lô).

Enoncé n° 37 : CHEVREAU (Quito), A. et C. BLANCHARD (Marseille) et SAMBARD (Saint-Quentin).

Solutions des énoncés n° 38, 39 et 40 :

Enoncé n° 38 (A. BLANCHARD, Université de Provence, Marseille).

Pour tout naturel n, on désigne par p(n) le nombre maximum de *paires* que l'on peut choisir dans un ensemble à n éléments, de manière que toutes les réunions de deux paires choisies soient distinctes.

Montrer que p(n) est de l'ordre de $n^{3/2}$.

Solution de l'auteur :

1) Majoration. Soit E un ensemble à n éléments, P un ensemble de paires contenues dans E satisfaisant à la propriété indiquée ; soit p le nombre d'éléments de P.

Pour tout $a \in E$, soit $h(a)+1$ le nombre des b tels que $\{a,b\} \in P$. On a alors $2p = \Sigma_a\ (h(a)+1)$. De plus si $\{a,b\} \in P$ et $\{a,b'\} \in P$, $\{b,b'\} \notin P$, de sorte qu'à a correspondent $h(a)\,(h(a)+1)/2$ paires $\{b,b'\}$ qui n'appartiennent pas à P ; ces paires ne sont pas obtenues en considérant un autre élément a' car on n'a pas à la fois $\{a,b\} \in P$, $\{a,b'\} \in P$, $\{a',b\} \in P$ et $\{a',b'\} \in P$. On a donc :

$$\Sigma_a\ h(a)\,(h(a)+1)/2 \leqslant n(n-1)/2 - p\ .$$

Soit alors k un naturel à choisir on a :

$$\sum_{h(a)<k} (h(a)+1) \leqslant nk$$

$$\sum_{h(a)\geqslant k} (h(a)+1) \leqslant \frac{1}{k}\ \Sigma_a\ h(a)\,(h(a)+1) \leqslant n(n-1)/k - 2p/k$$

On en tire

$$2p \leqslant n(k^2 + n-1)/(k+1)$$

d'où enfin $p \leqslant n^{3/2}$ en choisissant k égal à la partie entière de $\sqrt{n}$.

2) Minoration. La minoration suivante est basée sur une idée géométrique : si *les éléments de* E *sont les points et les droites d'un plan* (projectif ou affine, peu importe), *les paires formées d'une droite* D *et d'un point* M *situé sur* D sont telles que les réunions de deux paires soient toutes distinctes: cela est facile à vérifier. *Si q est une puissance de nombre premier*, on sait qu'il existe un plan projectif à q^2+q+1 points et q^2+q+1 droites, chaque droite passant par $q+1$ points ; on a donc :

$$p(2q^2+2q+2) \geqslant (q^2+q+1)\,(q+1)$$

Comme $p(n)$ est fonction croissante de n, on peut énoncer :

q étant la plus grande puissance de nombre premier telle que $2(q^2+q+1) \leqslant n$, *on a* $p(n) \geqslant (q^2+q+1)(q+1)$.

Ne prenant que les puissances de 2 parmi les puissances de premiers, on peut voir que la plus petite limite de $p(n).\ n^{-3/2}$ est supérieure à $1/8$.

Utilisant au contraire le fait, non élémentaire, que le rapport de deux nombres premiers successifs tend vers 1, on voit que la plus petite limite de $p(n).\ n^{-3/2}$ est supérieure à $1/2\sqrt{2}$.

Je ne sais pas si $p(n).\ n^{-3/2}$ admet une limite.

Enoncé n° 39

Soit E un ensemble à n éléments. Déterminer le nombre de relations définies dans E telles que pour tout élément a de E, il existe exactement deux éléments x tels que aRx et exactement deux éléments y tels que yRa.

Solution (Auque, Clermont-Fd)

En considérant le graphe cartésien de la relation, le problème consiste à mettre des pions sur un damier $n \times n$ de sorte que chaque ligne et chaque colonne contiennent exactement 2 pions. Soit $g(n)$ le nombre de figures possibles.

Méthode 1 :

Dénombrons les solutions pour lesquelles les cases A1, A2, B1 (en bas à gauche) portent un pion.

Si la case B2 est occupée, en rayant les deux premières lignes et les deux premières colonnes, on voit qu'il y a $g(n-2)$ façons de remplir le damier.

Si la case B2 n'est pas occupée, nous y plaçons un pion et nous rayons la première ligne et la première colonne ; nous obtenons un damier $(n-1) \times (n-1)$ satisfaisant, comportant un pion dans la case située en bas à gauche. Il y a C_{n-1}^2 façons de choisir les cases de la première ligne dans ce damier et $(n-2)$ façons de les choisir quand l'une est imposée.

De plus, $g(n)$ est le produit du nombre de solutions particularisées par $(n-1)C_n^2$. On obtient ainsi la formule de récurrence :

$$n \geqslant 3 \qquad g(n) = (n-1)C_n^2 \left(g(n-2) + \frac{2}{n-1}\, g(n-1)\right).$$

En posant $\qquad g(n) = \dfrac{n!}{2^{n-1}}\, h(n) \qquad$ on a :

$$h(n) = 2(n-1)\left(h(n-1) + h(n-2)\right)$$

avec $\qquad g(1) = h(1) = 0 \qquad$ et $\qquad g(2) = h(2) = 1$.

Cette récurrence ne m'a pas conduit à une formule simple de $g(n)$.

Méthode 2 :

Subdivisons chaque case du damier en 4 petites cases, obtenant ainsi un damier $2n \times 2n$. Appelons configuration D_n toute configuration du damier $2n \times 2n$ ayant un pion par ligne et par colonne. Il y a $(2n)!$ configurations D_n. Dans chaque grande case il peut y avoir 0,1 ou 2 pions. Désignons par $f(n)$ le nombre de D_n telles qu'aucune grande case n'ait 2 pions.

Le nombre de D_n ayant k grandes cases comportant 2 pions est $(C_n^k)^2(k!)2^k f(n-k)$. En effet, il y a $(C_n^k)^2(k!)$ possibilités de choisir k grandes cases sur des lignes et des colonnes distinctes ; dans chacune des cases choisies, indépendamment, on peut placer les pions de deux façons ; en rayant les lignes et les colonnes des cases choisies, on a une configuration D_{n-k} telle qu'aucune grande case n'ait 2 pions.

On a ainsi la formule :

$$(2n)! = \sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 \, (k!)2^k \, f(n-k)$$

que l'on écrit :

$$C_{2n}^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} \cdot \frac{f(n-k)}{((n-k)!)^2}$$

Utilisons les séries entières formelles :

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_{2n}^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} \, \frac{f(n-k)}{((n-k)!)^2} \right) z^n$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n)}{(n!)^2} z^n \right) = e^{2z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n)}{(n!)^2} z^n$$

En multipliant par e^{-2z} et en développant, on a :

$$\frac{f(n)}{(n!)^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \, C_{2k}^k \, \frac{2^{n-k}}{(n-k)!}$$

Enfin, pour chaque solution du problème posé sur le damier $n \times n$, il y a 4^n configurations D_n (ceci se voit par des échanges de lignes et de colonnes voisines sur le damier subdivisé, ou mieux encore par cheminement sur le damier : on numérote les pions, 1 pour le premier de la première ligne, 2 pour le deuxième de la première ligne, 3 pour l'autre pion de la colonne du pion 2, 4 pour l'autre pion de la ligne du pion 3, etc...Si, quand on retombe sur 1 , on n'a pas épuisé les pions, on continue le numérotage à partir d'un pion non numéroté, etc... Dans un cycle ayant t pions, on a 2^t façons de placer les pions sur le damier subdivisé).

On obtient ainsi :

$$g(n) = \frac{f(n)}{4^n} = \frac{(n!)^2}{2^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{C_{2k}^{k}}{2^k (n-k)!}$$

Autre solution : TISSIER (Le Raincy).

Enoncé n° 40 (AUQUE, Clermont-Fd)

Combien y a-t-il de multiples de 37 dans l'ensemble des nombres dont l'écriture dans le système décimal utilise dix chiffres, ces chiffres étant tous distincts ?

Précisez le plus grand et le plus petit.

Solution de l'auteur :

$$\overline{a_9 a_8 \ldots a_1 a_0} \equiv 0 \quad (\text{mod. } 37)$$

s'écrit (car $1000 \equiv 1 \quad \text{mod. } 37$)

$$a_0 + a_3 + a_6 + a_9 + 10(a_1 + a_4 + a_7) + 100(a_2 + a_5 + a_8) \equiv 0 \quad \text{mod. } 37$$

ou encore (car $\Sigma a_i = 45$)

$$45 + 9(a_1 + a_4 + a_7) + 99(a_2 + a_5 + a_8) \equiv 0 \quad \text{mod. } 37$$

ou enfin (car 9 et 37 sont premiers entre eux)

$$5 + (a_1 + a_4 + a_7) + 11(a_2 + a_5 + a_8) \equiv 0 \quad \text{mod. } 37.$$

Posons $x = a_2 + a_5 + a_8$ et $y = a_1 + a_4 + a_7$; x et y sont compris entre 3 et 24, et x + y entre 15 et 39.

Pour chaque x de 3 à 24, on calcule la solution de $5 + y + 11x \equiv 0 \quad \text{mod. } 37$; les inégalités précédentes conduisent à ne retenir que les couples (x,y) :

(5,14),(8,18),(9,7),(11,22),(12,11),(15,15),(16,4),(18,9),(19,8),(22,12).

On a $5 = 0 + 1 + 4 = 0 + 2 + 3$ et

$14 = 0+5+9 = 0+6+8 = 1+4+9 = 1+5+8 = 1+6+7 = 2+3+9 = 2+4+8$
$= 2+5+7 = 3+4+7 = 3+5+6$

Le couple (5,14) donne ainsi 6 cas possibles, explicitement :
014 et 239 ; 014 et 257 ; 014 et 356 ; 023 et 149 ; 023 et 158 ; 023 et 167.

En faisant le même travail pour les autres couples, on établit un tableau qui permet de déterminer tous les multiples de 37 dans l'ensemble de nombres considéré.

Ce tableau comporte respectivement 6,9,3,2,23,12,3,0,8,1 cas utilisant le zéro et 0,5,0,5,5,12,0,5,5,5 ne l'utilisant pas.

Option 1 : zéro est accepté comme chiffre a_9.

Chaque cas du tableau donne naissance à 4! 3! 3! nombres de l'ensemble (permutations indépendantes de $\{a_0, a_3, a_6, a_9\}$, de $\{a_1, a_4, a_7\}$ et de $\{a_2, a_5, a_8\}$).

On trouve ainsi $109 \times 6 \times 6 \times 24 = 94\,176$ multiples de 37 et on peut noter que ce nombre est voisin de $(10!)/37 = 98\,075$ ...

Option 2 : zéro non accepté comme chiffre a_9.

Chaque cas du tableau donne naissance à 4! 3! 3! nombres si 0 est utilisé dans la décomposition de x ou de y et $3 \times 3!\ 3!\ 3!$ nombres dans le cas contraire.

On trouve ainsi $6 \times 6 \times 6(4 \times 67 + 3 \times 42) = 85\,104$ multiples de 37.

Enfin un simple examen du tableau montre que le plus grand multiple de 37 est 9 876 435 012, le plus petit dans l'option 1 est 0 123 564 978 et le plus petit dans l'option 2 est 1 023 654 987.

Une seule autre solution exacte : F. SALLES (Cannes).