Bulletin de l'APMEP n°304 - Juin 1976

3

LES RUBRIQUES DE L'A.P.M.E.P.

Rubrique des problèmes de L'A.P.M.

Cette rubrique est pour le plaisir, celui qui nous fait choisir les mathématiques à vingt ans, et non directement pour notre enseignement.

Le niveau ne doit pas excéder celui des classes préparatoires ou des deux premières années de faculté. Un certain caractère d'originalité dans l'énoncé est souhaité, ce qui exclut, en particulier, les applications immédiates de théorèmes classiques, ou les problèmes déjà parus dans d'autres revues.

Si l'auteur d'un énoncé n'est pas en mesure d'en donner la solution, il doit accompagner son envoi du maximum d'informations concernant le problème, afin d'aider les responsables de la rubrique. Un astérisque signale un problème dont la solution n'est pas connue de ceux-ci. Le Bulletin publie les meilleures solutions.

Enoncés et solutions sur feuilles séparées et tapées à la machine S.V.P. N'oubliez pas de signer. Toute correspondance concernant la rubrique est à adresser à :

Charles AUQUE
Université de Clermont-Ferrand
Mathématiques Pures
B.P. 45 - 63170 AUBIERE

ENONCES

Enoncé n° 51 (M. LEYROLLE, Arpajon-sur-Cère)

Quelles sont les dispositions possibles de quatre points distincts A,B,C,D d'une droite affine euclidienne tels que :

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC \quad ?$$

Enoncé n° 52 (D. ROUX, Besançon)

Existe-t-il un entier n tel que, dans l'ensemble de tous les coefficients binomiaux C_n^p, il y ait autant d'entiers pairs que d'entiers impairs ?

Enoncé n° 53 (JULLIEN, Grenoble)

Trouver une bijection de $\mathbb{N}$ telle que, pour tout entier n strictement positif, il y ait une partie stable et une seule de cardinal n.

SOLUTIONS

Enoncé n° 46 (REISZ, Auxerre)

Dans un espace affine euclidien de dimension finie, quatre points distincts A,B,C,D vérifient :

$$\text{(I)} \quad d(A,B) < d(A,C) < d(A,D)$$
$$\text{(II)} \quad d(D,C) < d(D,B) < d(D,A)$$

En déduire que les projections orthogonales de A,B,C,D sur la droite AD sont placées dans l'ordre A, p(B), p(C), D.

Solution : (J. ONIMUS, Auxerre)

Quels que soient les points P et Q, on a :

$$2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{PQ} = (AQ^2 - AP^2) + (DP^2 - DQ^2) = 2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{P'Q'}$$

en désignant par P' et Q' les projections de P et Q sur la droite AD.

En effet,

$$DP^2 = AP^2 + AD^2 - 2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AP}$$

et

$$DQ^2 = AQ^2 + AD^2 - 2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AQ}$$

a) Faisons $P = A$ et $Q = B$:

$$2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB'} = AB^2 + (DA^2 - DB^2) > 0$$

b) Faisons $P = B$ et $Q = C$:

$$2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{B'C'} = (AC^2 - AB^2) + (DB^2 - DC^2) > 0$$

c) Faisons $P = C$ et $Q = D$:

$$2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{C'D} = (AD^2 - AC^2) + DC^2 > 0$$

Donc $\overrightarrow{AB'}$, $\overrightarrow{B'C'}$ et $\overrightarrow{C'D}$ ont même sens que $\overrightarrow{AD}$.

Autres solutions : ADAD de Sceaux, CHEVREAU de Quito, CUCULIERE de Noisy-le-Sec, CURTY de Grenoble, JACOB de Grenoble, LEYROLLE d'Arpajon-sur-Cère, SAMBARD de Saint-Quentin, un étudiant de CAPES à Pau et l'auteur.

Enoncé n° 48 (CUCULIERE, IREM Paris-Nord)

Pour quels entiers p entre 1 et 9 existe-t-il deux nombres distincts, qui s'écrivent en utilisant une fois et une seule chacun des chiffres de 1 à p, tels que l'un divise l'autre ?

Solution : (D. PONASSE, Yaoundé)

Appelons E_p l'ensemble des nombres qui, dans le système décimal, s'écrivent avec les chiffres 1, ..., p, chacun étant pris une fois et une seule. On cherche p tel qu'il existe a et b dans E_p avec $a \neq b$ et b multiple de a.

On peut éliminer trivialement :

$p = 1$ car $E_1 = \{1\}$

$p = 2$ car $E_2 = \{12 ; 21\}$.

Le plus petit nombre de E_p est

$$\overline{12\ldots p} > 1 + 10 + \ldots + 10^{p-1}$$

Le plus grand nombre de E_p est

$$\overline{p\ldots 21} < p(1 + 10 + \ldots + 10^{p-1})$$

Donc, en posant $b = au$, on a $2 \leqslant u \leqslant p - 1$.

On sait que a et b sont congrus à S_p modulo 9 (S_p : somme des nombres de 1 à p). Rappelons :

$s_3 = 6,\quad s_4 = 10,\quad s_5 = 15,\quad s_6 = 21,\quad s_7 = 28,\quad s_8 = 36,\quad s_9 = 45.$

$au - b = 0$, donc $(u-1)S_p \equiv 0 \pmod 9$; or $u - 1$ est, ou bien égal à 3 ou 6, ou sinon premier avec 9 ; de toutes façons : $S_p \equiv 0 \pmod{3}$.

Ceci élimine les valeurs $p = 4$ et $p = 7$.

Seules S_8 et S_9 sont multiples de 9, donc si $p = 3$ ou 5 ou 6 : $u - 1 \equiv 0$ (mod. 3), donc nécessairement $u = 4$.

Ceci élimine $p = 3$.

On peut également éliminer $p = 5$ et $p = 6$, car 2 est un chiffre de a et $4 \times 2 = 8$, ce qui avec une retenue égale à 0, 1 ou 2 donnerait un chiffre égal à 8, 9 ou 0 dans b.

Finalement, seules les valeurs $p = 8$ et $p = 9$ peuvent convenir.

Elles conviennent effectivement, par exemple :

pour $p = 8$: $2 \times (13\,672\,584) = 27\,345\,168$
pour $p = 9$: $2 \times (123\,456\,789) = 246\,913\,578$

Autres solutions : BAILLEUL de Tours, QUENTON de Madrid, SAMBARD de Saint-Quentin, un correspondant de Paris dont je n'ai pas le nom et l'auteur.

Le problème de la recherche de toutes les solutions pour $p = 8$ et $p = 9$ reste ouvert !

Enoncé n° 50 (PERONNY, Clermont-Ferrand)

Existe-t-il une suite numérique réelle (u_n), telle que la série de terme général u_n^α soit convergente pour $\alpha = 1$ et divergente pour tout $\alpha \neq 1$?

Solution : (AUQUE, Clermont-Ferrand)

La suite définie par :

$$u_{3n} = 2/\mathrm{Log}(n+2) \qquad u_{3n+1} = (-1)/\mathrm{Log}(n+2) \qquad u_{3n+2} = (-1)/\mathrm{Log}(n+2)$$

convient ; en effet, pour $\alpha = 1$, le terme général tend vers 0 et, pour tout n, la somme des termes de u_0 à u_{3n+2} est nulle ; pour $\alpha \neq 1$, ou la suite n'est pas définie, ou la somme des termes de u_0^α à u_{3n+2}^α tend vers l'infini, car la série de terme général $1/(\mathrm{Log}(n+2))^\alpha$ est divergente.