5

LES RUBRIQUES DE L'A.P.M.E.P.

Les problèmes de l'A.P.M.

Cette rubrique est pour le plaisir, celui qui nous fait choisir les mathématiques à vingt ans, et non directement pour notre enseignement.

Le niveau ne doit pas excéder celui des classes préparatoires ou des deux premières années de faculté. Un certain caractère d'originalité dans l'énoncé est souhaité, ce qui exclut, en particulier, les applications immédiates de théorèmes classiques, ou les problèmes déjà parus dans d'autres revues.

Si l'auteur d'un énoncé n'est pas en mesure d'en donner la solution, il doit accompagner son envoi du maximum d'informations concernant le problème, afin d'aider les responsables de la rubrique. Un astérisque signale un problème dont la solution n'est pas connue de ceux-ci. Le Bulletin publie les meilleures solutions.

Enoncés et solutions sur feuilles séparées et tapées à la machine S.V.P. N'oubliez pas de signer. Toute correspondance concernant la rubrique est à adresser à :

Charles AUQUE
Université de Clermont-Ferrand
Mathématiques Pures
B.P. 45 - 63170 AUBIERE

ENONCES

Enoncé n° 54 **(CUCULIERE, I.R.E.M. Paris-Nord)**

On donne, comme exemple d'algèbre de Boole, l'ensemble des parties d'un ensemble. Cet ensemble des parties est fini ou infini non dénombrable. Existe-t-il donc une algèbre de Boole infinie dénombrable ?

Enoncé n° 55 **(WARUSFEL, Paris)**

Existe-t-il un corps dont le groupe multiplicatif est monogène infini ?

Enoncé n° 56 **(I.R.E.M. de Clermont-Ferrand)**

Peut-on construire un polyèdre dont toutes les faces sont des hexagones ?

Dans l'affirmative, quel est le nombre minimum de faces ?

SOLUTIONS

Une solution ($u_n = (\cos 2n/3)/\mathrm{Log}\, n$ pour $n \geqslant 2$) au problème n° 50 a été donnée par M. LAILLET de Châlon-sur-Saône.

Enoncé n° 47 **(LEGRAND, Bordeaux)**

f et h étant deux fonctions numériques définies et continues sur $[a, +\infty[$ vérifiant les hypothèses suivantes : f est dérivable sur $]a, +\infty[$; pour tout réel t, $h(t) > 0$;

$$\int_a^{+\infty} \frac{dt}{h(t)} = +\infty \; ;$$

et

$$\lim_{x \to +\infty} [\, f(x) + h(x) f'(x) \,] = \lambda \; .$$

Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lambda$; si en outre on suppose que

$\underline{\lim}_{x \to +\infty} h(x) > 0$, établir que $\underline{\lim}_{x \to +\infty} f'(x) = 0$.

(le symbole $\underline{\lim}$ désigne la "limite inférieure").

Solution de l'auteur

Posons pour $x > a$:

$$g(x) = f(x) + h(x)\, f'(x)$$

$$H(x) = \int_a^x \frac{dt}{h(t)}$$

$$\varphi(x) = e^{H(x)} f(x)$$

g, H, φ sont des fonctions numériques définies sur $]a, +\infty[$; de plus, H et φ sont dérivables, et

$$H'(x) = \frac{1}{h(x)}$$

$$\varphi'(x) = e^{H(x)}[H'x)\, f(x) + f'(x)] .$$

D'où

$$\varphi'(x) = \frac{e^{H(x)}}{h(x)}\, g(x) .$$

Soit $a < x_1 < x$; d'après le "*théorème généralisé des accroissements finis*" :

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_1)}{e^{H(x)} - e^{H(x_1)}} = \frac{\varphi'(\xi)}{H'(\xi)\, e^{H(\xi)}} = \frac{h(\xi)\, \varphi'(\xi)}{e^{H(\xi)}} = g(\xi)$$

où $x_1 < \xi < x$.

On en déduit :

$$f(x) - \lambda = g(\xi) - \lambda + e^{[H(x_1) - H(x)]}[f(x_1) - g(\xi)]$$

et

$$|f(x) - \lambda| \leqslant |g(\xi) - \lambda| + e^{[H(x_1) - H(x)]}[|f(x_1)| + |g(\xi)|] .$$

Soit $\epsilon > 0$; on peut trouver $x_1 > a$ tel que :

$$u > x_1 \Rightarrow |g(u) - \lambda| < \epsilon .$$

Par suite, pour $x > x_1$,

$$|f(x) - \lambda| < \epsilon + e^{[H(x_1) - H(x)]}[|f(x_1)| + |\lambda| + \epsilon] .$$

Il en résulte alors, puisque $\lim_{x \to +\infty} H(x) = +\infty$,

$$\overline{\lim_{x \to +\infty}} \; |f(x) - \lambda| \leqslant \epsilon .$$

Or, ϵ étant arbitraire, on en conclut que le premier membre est nul et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lambda$.

Si l'on suppose que $\underline{\lim}_{x \to +\infty} h(x) > 0$, il existe $b > a$ et $\mu > 0$ tels que :

$$x > b \Rightarrow h(x) > \mu$$

On a alors, pour $x > b$,

$$|f'(x)| < \frac{1}{\mu} \, |h(x) f'(x)| = \frac{1}{\mu} \, |g(x) - f(x)| .$$

D'où

$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0 \text{ car } \lim_{x \to +\infty} [g(x) - f(x)] = \lambda - \lambda = 0 .$$

Exemples :

f est définie et continue sur $[a, +\infty[$ et dérivable sur $]a, +\infty[$; alors :

α) $\lim_{x \to +\infty} [f(x) + f'(x)] = \lambda \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lambda$ et $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0$

(cas où $h = 1$).

β) $\lim_{x \to +\infty} [f(x) + x\, f'(x)] = \lambda \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lambda$ et $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0$

(cas où $h(x) = x$).

γ) $\lim [f(x) + e^{-x} f'(x)] = \lambda \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lambda$

(cas où $h(x) = e^{-x}$).

Mais dans cet exemple on ne peut plus conclure que $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0$.

Autres solutions : CHEVREAU de Quito et JACOB de Grenoble qui donne l'excellent exemple $f(x) = (\sin x^2)/x$.

Enoncé n° 51 (M. LEYROLLE, Arpajon-sur-Cère)

Quelles sont les dispositions possibles de 4 points distincts A,B,C,D d'une droite affine euclidienne tels que :

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC \ .$$

Solution (CARREGA, Lyon)

$$\text{(I)} \quad AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$$

Choisissons un repère de la droite euclidienne d'origine A et désignons par b,c,d les abscisses de B,C,D .

$$\text{(I)} \longmapsto |c|\,|d-b| = |b|\,|d-c| + |d|\,|c-b|$$
$$c^2\,(d-b)^2 = b^2\,(d-c)^2 + d^2\,(c-b)^2 + 2\,|bd(d-c)(c-b)|$$

En développant les carrés et en simplifiant, on obtient :

$$\text{(I)} \longmapsto bd(d-c)(c-b) = |\,bd(d-c)(c-b)\,|$$
$$\longmapsto bd(d-c)(c-b) > 0$$

— Si b et d ont même signe alors $d-c$ et $c-b$ aussi. Cela signifie que si A n'est pas entre B et D alors C est entre B et D.

— Si b et d sont de signes contraires alors $d-c$ et $c-b$ aussi. Cela signifie que si A est entre B et D alors C n'est pas entre B et D.

En conclusion : Les dispositions des points vérifiant (I) sont celles pour lesquelles *un seul des points A et C se trouve entre B et D.* Ainsi, sur les 24 dispositions possibles, 8 seulement vérifient (I).

Remarque : Dans le plan affine euclidien, (I) est une condition nécessaire et suffisante pour que le quadrilatère convexe (A,B,C,D) soit inscriptible dans un cercle (Théorème de Ptolémée).

Autres solutions : BRUSQUE de Nîmes, CUCULIERE de Paris, DUMEIGE d'Amiens, KAUFFMANN de Paris, MORIN d'Aurillac, PETIT de Béziers, TISSIER de Neuilly-sur-Marne et l'auteur.

Enoncé n° 52 (D. ROUX, Besançon)

Existe-t-il un naturel n tel que, dans l'ensemble des coefficients binomiaux C_n^p, il y ait autant de naturels pairs que de naturels impairs ?

Solution (TISSIER, Neuilly-sur-Marne)

On introduit m, naturel impair, et s, naturel, tels que $n + 1 = 2^s m$.

Pour $k \geqslant 1$, on a $kC_n^k = (n - k + 1)\, C_n^{k-1}$.

Si k n'est pas divisible par 2^s, C_n^k et C_n^{k-1} sont de même parité.

Soit

$$E_1 = \left\{ C_n^0, C_n^1, \ldots, C_n^{2^s - 1} \right\},$$

$$E_2 = \left\{ C_n^{2^s}, \ldots, C_n^{2 \cdot 2^s - 1} \right\}, \ldots,$$

$$E_m = \left\{ C_n^{(m-1)2^s}, \ldots, C_n^{m\, 2^s - 1} \right\}.$$

Dans chaque E_i, tous les nombres ont la même parité. Comme il y a un nombre impair de E_i, il est impossible qu'il y ait autant de C_n^k pairs que d'impairs.

Autres solutions : BLANCHARD de Marseille, BRUSQUE de Nîmes, CUCULIERE de Paris, KAUFFMANN de Paris et l'auteur.

Les deux premiers démontrent la propriété intéressante : le nombre de C_n^p impairs, pour n fixé, est égal à 2^x où x est le nombre de 1 dans l'écriture binaire de n.

Enoncé n° 53 (JULLIEN, Grenoble)

Trouver une bijection de N telle que, pour tout entier n strictement positif, il y ait une partie stable et une seule de cardinal n.

Solution **(BAUVAL, Versailles) pour N_*.**

Soit P_k le segment $[2^k, 2^{k+1} - 1]$ de N. Le cardinal de P_k est 2^k. L'ensemble des P_k, pour k naturel, est une partition de N_*. Soit f_k la permutation circulaire définie sur P_k par :

$$\forall\, x \in [2^k, 2^{k+1} - 1[\ , \ f_k(x) = x + 1$$

et

$$f_k\,(2^{k+1} - 1) = 2^k \ .$$

Soit f la bijection de N_* telle que la restriction de f à P_k soit f_k :

x :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	etc ...
f(x) :	1	3	2	5	6	7	4	9	10	11	12	13	14	15	8	etc...

a) Toute partie P_k est stable par f. Toute réunion de parties telles que P_k est stable par f.

b) Toute partie de N_*, stable par f, et qui a un élément commun avec P_k, contient P_k. Donc les seules parties de N_* stables par f sont les réunions de parties telles que P_k.

c) Tout nombre naturel n s'écrit d'une manière unique en numération binaire. A n on peut donc associer la partie I de N telle que $n = \sum_{k\in I} 2^k$. On pose $P = \bigcup_{k\in I} P_k$. L'ensemble P ainsi défini est la seule partie de N_* qui vérifie les deux conditions : $f(P) = P$, et cardinal de $P = n$.

Autres solutions : BRUSQUE de Nîmes, CARREGA de Lyon, CUCULIERE de Paris, DUMEIGE d'Amiens, KAUFFMANN de Paris, LANFRANCHI de Grenoble, LIARDET de Marseille et TISSIER de Neuilly-sur-Marne.