# 5

# LES PROBLEMES DE L'A.P.M.E.P.

Les propositions d'énoncés (avec la solution dans la mesure du possible) et les solutions aux problèmes posés dans cette rubrique doivent être adressés à :

Charles AUQUE
Université de Clermont-Ferrand
Mathématiques pures
B.P. 45 — 63170 AUBIÈRE

## ENONCES

**Enoncé n° 60** (Ch. Auque, Clermont-Ferrand)

Démontrer que pour tout couple $(a, n)$ de naturels strictement positifs, il existe un naturel $r$ et une suite $\epsilon_1, \dots, \epsilon_r$ de nombres valant $+1$ ou $-1$ tels que

$$a = \sum_{k=1}^{r} \epsilon_k k^n$$

**Enoncé n° 61** (P. Jullien, Grenoble)

Une suite numérique $(u_n)$ est dite $p$-triée ($p \in \mathbb{N}_*$) si et seulement si

$$\forall\ n \in \mathbb{N} \quad u_{n+p} \geq u_n.$$

$p$-trier une suite finie consiste, pour $r = 0,1,\dots,p-1$, à réordonner les termes d'indice $r+kp$ de sorte qu'ils forment une suite croissante.

Démontrer que si l'on $q$-trie une suite $p$-triée, elle reste $p$-triée.

# SOLUTIONS

N'ayant pas encore reçu de solutions pour les problèmes n° 57, 58 et 59, je désire revenir sur les problèmes dont la solution n'a pas paru, en indiquant dès maintenant que les lecteurs peuvent se remettre au travail.

**Du numéro 284 du Bulletin :**

* *Enoncé n° 19* (P. Jullien, Grenoble)

Dans le plan euclidien, appelons *forêt* un certain disque fermé de diamètre unité et *arbres* certains points de la forêt. Appelons *route* de largeur $h$ la partie ouverte du plan comprise entre deux droites parallèles à distance $h$ appelées *bords* de la route (les points des bords n'appartiennent pas à la route).

Disons qu'une route *traverse* la forêt lorsque chacun de ses bords a, avec la forêt, une intersection non vide.

*Problème* : Sachant qu'il y a 100 arbres dans la forêt, quelle est la largeur maximum $m$ telle qu'on puisse affirmer qu'il existe une route, de largeur $m$, qui traverse la forêt et qui ne contient aucun arbre.

La détermination exacte de $m$ semble extrêmement difficile, mais des encadrements peuvent être obtenus :

Prenons une direction définie par deux arbres quelconques, et traçons, par chaque arbre, la droite ayant cette direction. On a au plus 99 droites, donc au plus 98 intervalles entre droites "consécutives". Il existe ainsi au moins une route de largeur 1/98, ce qui donne une borne inférieure pour $m$ (à améliorer).

Chaque disposition particulière des 100 arbres (polygones réguliers, "figures" simples, ...) donne au contraire, après le calcul de la largeur maximum, une borne supérieure pour $m$.

Le meilleur encadrement obtenu par les lecteurs pourra être publié.

**Du numéro 287 du Bulletin**

* *Enoncé n° 26* (P. Mamel, étudiant à Poitiers)

On prend $2^n$ allumettes, on forme $p$ tas de $a_1, a_2, \ldots, a_p$ allumettes respectivement. On a le droit de modifier ces tas de la manière suivante : on double un des tas à l'aide d'allumettes prises dans un seul autre tas. On recommence cette opération jusqu'à ce qu'il n'y ait plus qu'un seul tas. Quel est, en fonction de $a_1, a_2, \ldots, a_p$, le nombre minimum de coups nécessaire pour arriver à ce résultat ?

Je n'ai, dans mes dossiers, que l'énoncé !

* *Enoncé n° 27* (G. Letac, Toulouse)

Addition et soustraction sont gratuites. La multiplication de deux nombres réels, quels qu'ils soient, coûte 1 franc. On peut descendre à 4 francs le prix de revient du calcul de

$$1 + a + a^2 + \dots + a^7 = (1 + a)(1 + a^2)(1 + a^4)$$

Est-ce bien le coût minimum ?

Les réponses reçues ne sont pas satisfaisantes. La solution de l'auteur, G. Letac, sera publiée prochainement.

**Du numéro 302 du Bulletin**

**Enoncé n° 49* (E. Ehrhart, Strasbourg)

On désigne par $f(n)$ le nombre de points d'intersection des diagonales (considérées comme segments) d'un polygone régulier convexe à $n$ côtés.

1°) Déterminer $f(12)$ et $f(16)$.

2°) Déterminer $f(n)$ ou, à défaut, donner le meilleur encadrement possible de $f(n)$.

Mlle Sambard, de Saint-Quentin, a démontré les inégalités du texte de l'auteur (voir ci-dessous), en comptant la multiplicité du centre et des points sur les diagonales qui sont des diamètres.

La question n° 1, non abordée par les lecteurs, montre que ces bornes supérieures ne sont pas toujours atteintes et que la détermination de $f(n)$ est un problème extrêmement difficile.

Le texte ci-dessous nous a été communiqué par l'auteur en complément de l'énoncé.

**Une question ouverte sur les polygones réguliers**

*par E. EHRHART*

*Quel est le nombre de points d'intersection des diagonales d'un polygone régulier convexe de n côtés ?* (Les diagonales étant des segments et non des droites).

Malgré un énoncé simple, il semble difficile, sinon impossible, de donner une réponse générale à cette question. Mais on peut limiter le nombre cherché comme suit :

si $n$ *est impair* : $i \leqslant \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$ (1)

si $n$ *est multiple de* 4 : $i \leqslant \dfrac{(n-1)(n-2)(n^2-6n+12)}{24}$ (2)

si $n$ *est multiple de* 4 *plus* 2 : $i \leqslant \dfrac{(n-1)(n-2)(n^2-6n+12)}{24} + \dfrac{n}{2}$ (3)

On démontre en effet sans trop de peine que l'égalité est atteinte dans (1) si le polygone ne présente pas trois diagonales concourantes (*) ; elle est obtenue dans (2) et (3) si le polygone ne présente pas quatre diagonales concourantes ailleurs qu'en son centre, ni trois diagonales concourantes sans que l'une d'elles soit un diamètre. En particulier *l'égalité a lieu dans les trois cas si $n < 12$.*

Signalons deux polygones intéressants :

1) *Si $n = 12$* (dodécagone $A_1A_2 \dots A_{12}$), $i = 301$ et la valeur du second membre de (2) est 385.

Pour justifier $i = 301$, on est amené à démontrer géométriquement que les diagonales $A_1A_9$, $A_2A_{10}$, $A_3A_{12}$ sont concourantes, ainsi que $A_1A_8$, $A_2A_9$, $A_3A_{11}$, $A_4A_{12}$.

2) *Si $n = 16$*, $i = 1377$ et le second membre de (2) vaut 1505.

Pour l'établir, on démontre géométriquement que les diagonales $A_1A_8$, $A_2A_{13}$, $A_3A_{15}$ sont concourantes, ainsi que $A_1A_8$, $A_2A_{12}$, $A_5A_{16}$. (Le dessin montre qu'à part ces concourances non diamétrales et celles qui s'en déduisent par symétrie et rotation, il n'y en a pas d'autres ; les cordes $A_1A_6$, $A_2A_{14}$, $A_3A_{18}$ sont presque concourantes dans la figure, mais on démontre par le calcul qu'elles ne le sont pas rigoureusement).

Remarquons qu'il résulte des deux cas précédents que *pour tout $n$ multiple de 12 ou de 16 par un nombre impair, l'égalité dans (2) est exclue.*

(*) *Pour un polygone convexe quelconque de $n$* côtés ($n > 3$), ne présentant pas trois diagonales concourantes, le nombre de points d'intersection des diagonales est $\binom{n}{4}$, car à tout choix de 4 sommets correspond un de ces points et réciproquement.