8

LES PROBLEMES DE L'A.P.M.E.P.

Les propositions d'énoncés (avec la solution dans la mesure du possible) et les solutions aux problèmes posés dans le Bulletin doivent être adressées à :

Charles AUQUE
Université de Clermont-Ferrand
Mathématiques pures
B.P. 45 - 63170 AUBIERE

ENONCES

Enoncé n° 62 (EHRHART, Strasbourg)

Combien y a-t-il de matrices 4×4 symétriques par rapport à chaque diagonale, dont les éléments sont des naturels non nuls tels que la somme des éléments de chaque ligne ou colonne soit égale au naturel donné n ?

Enoncé n° 63 (TISSIER, Neuilly-sur-Marne)
Inspiré par le problème n° 48.

Soient n et p deux naturels tels que $n \geqslant 2$ et $1 \leqslant p \leqslant n-1$. Déterminer le nombre de naturels x dont l'écriture en base n utilise une fois et une seule chaque entier de 1 à p et tels que $2x$ possède la même propriété.

SOLUTIONS

Enoncé n° 57 (LEMAIRE, Douai)

Déterminer les triangles ABC du plan affine euclidien tel que la bissectrice intérieure en A, la hauteur issue de B et la médiane issue de C ont des longueurs égales.

Solution (LAILLET, Chalon-sur-Saône)

Considérons un triangle vérifiant les conditions de l'énoncé. Soient M le milieu de AB, H la projection orthogonale de B sur AC, I le pied de la bissectrice intérieure issue de A, H' la projection orthogonale de M sur AC, K la projection orthogonale de I sur AC.

$$\sin \widehat{MCA} = \frac{MH'}{MC} \text{ (même si l'angle est obtus) } = \frac{BH}{2MC} = \frac{1}{2}$$

(donc $\widehat{MCA} = 30°$ ou $150°$)

$$\sin \frac{A}{2} = \frac{IK}{AI} = \frac{IK}{BH} = \frac{CI}{CB} .$$

La bissectrice considérée étant la bissectrice intérieure, I est entre B et C. Donc

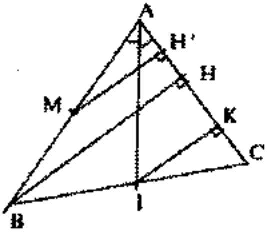
$$BC = BI + IC$$

d'où :

$$\sin \frac{A}{2} = \frac{CI}{BI + IC} = \frac{1}{1 + \frac{BI}{IC}} = \frac{1}{1 + \frac{AB}{AC}} = \frac{1}{1 + \frac{2AM}{AC}} .$$

Dans le triangle AMC, les côtés sont proportionnels aux sinus des angles opposés, donc :

$$\frac{AM}{AC} = \frac{\sin \widehat{ACM}}{\sin \widehat{AMC}} = \frac{1}{2 \sin \widehat{AMC}} = \frac{1}{2 \sin (\widehat{BAC} + \widehat{MCA})}$$



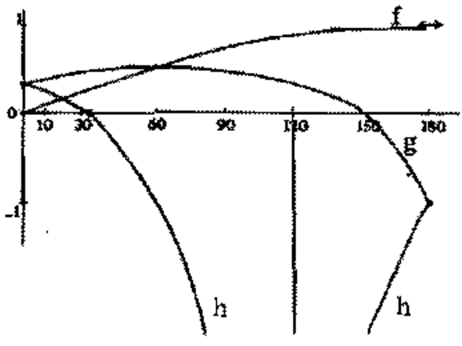
1er cas : $\widehat{MCA} = 30°$. On a alors :

$$\sin \frac{A}{2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\sin (A + 30)}} .$$

Construisons les représentations graphiques des fonctions définies par :

$$f(A) = \sin \frac{A}{2} \quad \text{et} \quad g(A) = \frac{1}{1 + \frac{1}{\sin (A + 30)}} , \quad A \in [0,180] .$$

Il est clair dans ce cas que l'équation n'a qu'une solution : $A = 60$. Il en résulte que CM est perpendiculaire à AB, donc que CM est la médiatrice de AB, donc le triangle est équilatéral. Un tel triangle répond effectivement à la question.



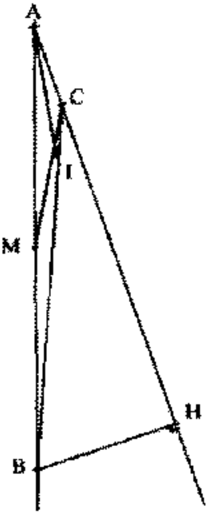
2e cas : $\widehat{MCA} = 150°$. On a alors :

$$\sin\frac{A}{2} = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{\sin(A + 150)}}$$

Soit h la fonction définie par

$$h(A) = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{\sin(A + 150)}}$$

Construisons la représentation graphique de h. On constate l'existence d'une solution et d'une seule : $A \simeq 19$. Un calcul numérique plus précis donne : $A \simeq 18{,}77$. La figure ci-contre montre qu'un tel triangle répond effectivement à la question.



Conclusion : deux solutions :

1°) ABC équilatéral

2°) ABC tel que :

$\widehat{BAC} \simeq 18{,}77°$ et

$\widehat{ACM} = 150°$

Autres solutions : BAUVAL (Versailles), CARREGA (Lyon) et l'auteur.

Enoncé n° 58 (GAUTHIER, Perpignan)

Pour quelles valeurs du naturel non nul n le nombre

$$\frac{2n+1}{n(n+1)}$$

est-il décimal ?

Solution (LEMAIRE, Douai)

1 — Si k, premier, divise n, ou divise $n+1$, il ne divise pas $2n + 1 = 2(n+1) - 1$. La fraction

$$\frac{2n+1}{n(n+1)}$$

est donc *irréductible*.

2 — Par suite, le nombre

$$\frac{2n+1}{n(n+1)}$$

n'est décimal que si *la décomposition de* $n(n+1)$ en facteurs premiers *ne comporte que des puissances de 2 ou de 5.*

3 — Supposons n *pair.*
$n + 1$, impair, ne peut être qu'une puissance de 5. Mais, n et $n + 1$ ne pouvant être simultanément multiples de 5, n doit être une puissance de 2, c'est-à-dire :

$$n = 2^a \quad \text{et} \quad n+1 = 5^b \quad \text{avec} \quad a \in \mathbf{N}_* \text{ et } b \in \mathbf{N}\,.$$

Or,
1° quel que soit l'entier pair $b \in \mathbf{N}$, on a

$$5^b \equiv 1 \ (\text{mod.}3) \quad \text{car} \quad 5^2 \equiv 1 \ (\text{mod.}3)$$

Donc $5^b - 1 \equiv 0 \ (\text{mod.}3)$; ce qui prouve que $5^b - 1$ ne peut être une puissance de 2 pour b pair.

2° quel que soit l'entier impair b, on a

$$5^b \equiv 5 \ (\text{mod.}8) \quad \text{car } 5^2 \equiv 1 \ (\text{mod.}8).$$

Donc $5^b - 1 \equiv 4 \ (\text{mod.}8)$. Il en résulte que, hormis le cas où $b = 1$, $5^b - 1$ ne peut être une puissance de 2 pour b impair, puisque $b \geqslant 3$ implique $5^b - 1 > 8$.

Le cas $b = 1$ fournit la solution

$$n = 5^1 - 1 = \boxed{4} = 2^2$$

$$\text{d'où} \qquad \frac{2n+1}{n(n+1)} = \frac{9}{20} = 0{,}45$$

4 — Supposons n *impair.*
n ne peut être que 1 ou une puissance de 5, donc $n + 1$, une puissance de 2, c'est-à-dire

$$n = 5^c \quad \textit{et} \quad n + 1 = 2^d \quad \textit{avec } c \textit{ et } d \textit{ appartenant à } \mathbf{N}\,.$$

Or, $5 \equiv 1 \ (\text{mod.}4)$ implique $5^c + 1 \equiv 2 \ (\text{mod.}4)$ pour tout entier $c \in \mathbf{N}$.

Il en résulte que, hormis le cas où $c = 0$, $5^c + 1$ ne peut être une puissance de 2, puisque $c \geqslant 1$ implique $5^c + 1 > 4$.
Le cas $c = 0$ fournit la solution

$$n = 5^0 = \boxed{1} = 2^1 - 1 ,$$

d'où $$\frac{2n+1}{n(n+1)} = \frac{3}{2} = 1{,}5.$$

En résumé, les seuls entiers positifs n tels que $\dfrac{2n+1}{n(n+1)}$ soit décimal sont 1 et 4.

Autres solutions : **BAUVAL** (Versailles), **BUDON** (Alger), **CANET** (Avignon), **CARREGA** (Lyon), **COQUET** (Valenciennes), **CUCULIERE** (Paris), **FULGENCE** (Dijon), **INGARAO** (Meknès), **LELOUSTRE** (Salon de Provence), **PONASSE** (Lyon), **SALLES** (Cannes), **VIDIANI** (Annecy) et l'auteur.

Les petits problèmes d'arithmétique sont rarement inédits. MM. SALLES et VIDIANI donnent les références d'une parution antérieure.

Enoncé n° 59 **(GIBERT, Le Puy)**

Soit n un naturel non nul. On dispose de n^3 cubes de 1 cm d'arête. Comment doit-on peindre les faces de ces cubes pour pouvoir construire le maximum de cubes de n cm d'arête et de surface unicolore, de couleurs différentes ?

Solution (BIGOT, Equeurdreville)

Désignons par k les cubes de 1 cm d'arête et par K ceux de n cm d'arête.

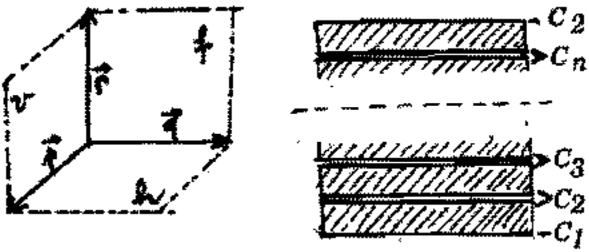
1°) Quel est le nombre maximal de cubes unicolores K constructibles avec les n^3 petits cubes k ?

Un cube unicolore K nécessite $6n^2$ faces peintes de petits cubes k. Les n^3 cubes k présentant au total $6n^3$ faces, le nombre maximal de cubes K réalisables est : $6n^3/6n^2 = n$.

2°) Ce nombre est effectivement réalisable selon le procédé suivant, par exemple.

Soit un cube K et ses trois directions de faces : h, f, v. Il suffit de décrire le procédé pour deux faces opposées de K ayant une direction déterminée, h par exemple. Imaginons les n couches horizontales superposées et peignons la face inférieure et la face supérieure de K en la couleur c_1, la face supérieure de la première couche et la face inférieure de la deuxième couche en la couleur c_2, et ainsi de suite jusqu'à la couleur c_n selon le schéma ci-joint. On obtient ainsi un cube K_1 de couleur c_1 (pour les deux faces h). Pour passer au cube K_2 de couleur c_2, il suffit de faire subir à la couche inférieure une translation de vecteur $\vec{r}$ (verticale, de n cm). Et ainsi de suite pour les couleurs suivantes ...

En procédant de même pour les n couches de direction f puis pour les n couches de direction v, il sera bien possible d'obtenir le cube K_i désiré parmi les n couleurs : pour avoir les deux faces de direction h de couleur c_i, il suffit de "couper" le cube K horizontalement entre les deux couches de couleur c_i et de permuter les deux blocs ainsi obtenus sans affecter aucune de leurs trois directions. De même pour les deux autres paires de faces.



JULLIEN (Grenoble) et LEMAIRE (Douai) donnent une solution algébrique :

Aux n couleurs, on associe n indéterminées $X_1, \dots, X_n$; à un petit cube ayant par exemple 3 faces (contiguës bien sûr) de la couleur i, 2 faces (contiguës) de la couleur j et une face de la couleur k, on associe le monome $X_i^3 \; X_j^2 \; X_k$.

Résoudre le problème revient à construire un polynome homogène de degré 6 tel que pour tout i, il y ait 8 monomes (de coefficient 1) où figure X_i^3, $12(n-2)$ monomes où figure X_i^2 et $6(n+2)^2$ monomes où figure X_i.

LEMAIRE donne l'exemple du cube de

$$(X_1X_2 + X_2X_3 + \dots + X_{n-1}X_n + X_nX_1).$$

JULLIEN explore des conditions supplémentaires (invariance de la solution par permutation quelconque des couleurs ...).