7

LES PROBLEMES DE L'A.P.M.E.P.

Les propositions d'énoncés (avec la solution dans la mesure du possible) et les solutions aux problèmes posés dans le Bulletin doivent être adressées à :

Charles AUQUE
Université de Clermont-Ferrand
Mathématiques pures
B.P. 45 - 63170 AUBIERE

ENONCES

Donnés sans solution par les auteurs.

Enoncé n° 64 (RUFFIN, Clermont-Ferrand)

Existe-t-il deux séries numériques semi-convergentes dont le produit, au sens de Cauchy, ($c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j$) soit une série absolument convergente ?

Enoncé n° 65 (LELOUSTRE, Salon-de-Provence)

Un jeu de patience, vendu dans le commerce, consiste à placer 16 pions sur un échiquier de 64 cases de sorte qu'il n'y ait pas plus de 2 pions sur chaque ligne, sur chaque colonne et sur chaque oblique.

Combien y a-t-il de configurations convenables différentes ?

Enoncé n° 66 (FAYOLLE, Saint-Pourçain-sur-Sioule)

Quels sont les entiers naturels égaux à la somme des factorielles de leurs chiffres (dans l'écriture décimale) ?

SOLUTIONS

De nombreuses solutions aux problèmes 57, 58 et 59 sont arrivées après la composition du dernier article.

Enoncé 57: ADAD (Sceaux), MESSMER (Strasbourg) et NOE (Marseille).

Enoncé 58 : ADAD (Sceaux), BLEVOT (Pré-St-Gervais), INGRAO (Meknès), LAILLET (Chalon-sur-Saône), MAUREL (Neuilly), NOE (Marseille), QUENTON (Madrid) et SASSATELLI (Nîmes).

Enoncé n° 59 : GAONAC'H (Le Pouliguen), qui interprète la solution géométrique en utilisant $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: un cube (i, j, h) sera peint suivant la figure développée

	$j+i$		
i	k	$i+1$	$k+1$
	j		

et qui a utilisé ce problème dans des fiches destinées à sa classe de cinquième.

Problèmes rappelés dans le N° 317 du Bulletin.

Enoncé n° 19 (P. JULLIEN, Grenoble)

Dans le plan euclidien, appelons "forêt" un certain disque fermé de diamètre unité et "arbres" certains points de la forêt. Appelons route de largeur h la partie ouverte du plan comprise entre deux droites parallèles à distance h appelées "bords" de la route (les points des bords n'appartiennent pas à la route).

Problème : Sachant qu'il y a 100 arbres dans la forêt, quelle est la largeur maximum m telle qu'on puisse affirmer qu'il existe une route de largeur m, qui traverse la forêt et qui ne contient aucun arbre ?

La meilleure borne supérieure est donnée par Jean LEMAIRE (Douai) :

Soient AB et CD deux diamètres perpendiculaires du disque.

Nous choisissons, pour restreindre la largeur des routes pouvant traverser le demi-disque ACB, de disposer régulièrement $n + 1$ arbres suivant un demi-cercle, de rayon R, dont le centre est celui du disque-forêt.

Afin de restreindre à la même valeur la largeur des routes pouvant traverser le second demi-disque ADB, les $99-n$ autres arbres seront placés, par paires, sur des droites équidistantes parallèles à AB.

Soit x l'espacement commun

1° des arbres sur la demi-circonférence,

2° des parallèles à AB.

Soient M et N deux arbres consécutifs de la demi-circonférence.

On voit que le rayon R de celle-ci est optimum lorsque la distance x = MN représente la largeur maximum que peut avoir une route dont un bord est tangent au disque-forêt et l'autre bord contient M et N. On trouve

$R = \sqrt{(\frac{1}{2} - x)^2 + \frac{x^2}{4}}$ et on a alors $\alpha = \widehat{MON}$ tel que

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{x}{2(\frac{1}{2} - x)} \qquad \text{ou} \qquad x = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$$

Nous opterons pour une disposition des arbres symétrique par rapport à CD. Et, du fait que nous évitons de placer un arbre en D, nous ne placerons pas d'arbre en C (le nombre total des arbres étant pair). Il en résulte que n doit être *impair*.

Détermination de n.

Le nombre (pas forcément entier) des arcs élémentaires (comme $\widehat{MN}$) en lesquels les $n+1$ arbres partagent la demi-circonférence est compris entre n (les arbres occupant les positions extrêmes seraient en A et B) et $n+2$.

On a donc $\frac{\pi}{n+2} < \alpha \leqslant \frac{\pi}{n}$ d'où :

$$(1) \qquad \left|\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2(n+2)}}{1 + 2\operatorname{tg}\frac{\pi}{2(n+2)}}\right| < x \leq \left|\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}}{1 + 2\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}}\right|$$

Pour le demi-disque ADB, on obtient $\frac{99-n}{2}$ parallèles équidistantes (distance x) découpant OD en $\frac{99-n}{2}$ intervalles de largeur x à partir de D (rappelons qu'il n'y a pas d'arbre en D) *plus* un intervalle d'extrémité O et de largeur inférieure ou égale à x.

On en déduit, puisque $OD = \frac{1}{2}$, que

$$(2) \qquad \frac{\frac{1}{2}}{\frac{99-n}{2} + 1} \leqslant x < \frac{\frac{1}{2}}{\frac{99-n}{2}} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{101-n} \leqslant n < \frac{1}{99-n}$$

Les bornes de (1) sont fonctions décroissantes de n ; celles de (2) sont fonctions croissantes de n.

Il est facile de voir que les intervalles définis par (1) et (2) n'ont une intersection non vide que pour l'entier impair $\boxed{n = 59}$.

Calcul de x.

Notons P et Q les arbres, appartenant respectivement aux demi-disques ACB et ABD, les plus proches de A. Nous supposons que Q appartient (comme P) au cercle (O,R). Posons :

$\widehat{AOP} = k\alpha$ d'où $\widehat{AOQ} = (1-k)\alpha$ (avec $0 \leq k < 1$).

On a donc $\pi = 59\alpha + 2k\alpha$ d'où

$$(3) \qquad k = \frac{\pi}{2\alpha} - 29{,}5 = \frac{\pi}{4 \text{ Arctg } \dfrac{x}{(1-2x)}} - 29{,}5$$

et, d'autre part,

$$OD = \frac{1}{2} = 20\,x + R \sin (1-k)\alpha$$

d'où
$$x = \frac{1}{20}\left[\frac{1}{2} - R \sin (1-k)\right]$$

Or, de (3), on tire

$$(1 - k) = 61 \text{ Arctg } \frac{x}{(1-2x)} - \frac{\pi}{2}\,.$$

d'où finalement, en éliminant k,

$$(4) \qquad x = \frac{1}{20}\left[\frac{1}{2} + \sqrt{(\frac{1}{2} - x)^2 + \frac{x^2}{4}} \cos\left(61 \text{ Arctg } \frac{x}{(1-2x)}\right)\right]$$

D'après (2), on prévoit que x doit être voisin de $\frac{1}{40}$. La solution de (4) par approximations successives donne :

$$x = 0{,}024\,688\,8$$

Précisons comment nous disposons les arbres du demi-disque ADB :

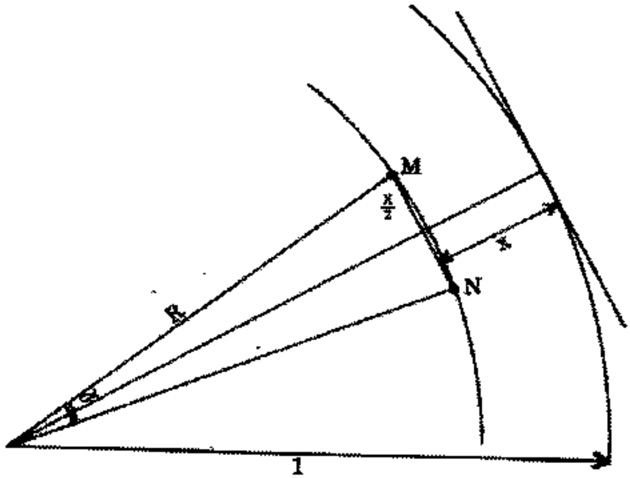
- Q et son symétrique Q' par rapport à CD sont sur le cercle (O,R) ;
- les arbres suivants sont placés aux intersections des parallèles menées de Q et Q' à CD avec les parallèles équidistantes à AB, tant que ces intersections sont situées à l'intérieur du disque-forêt ;
- les autres sont placés sur le cercle (O, $\frac{1}{2}$).

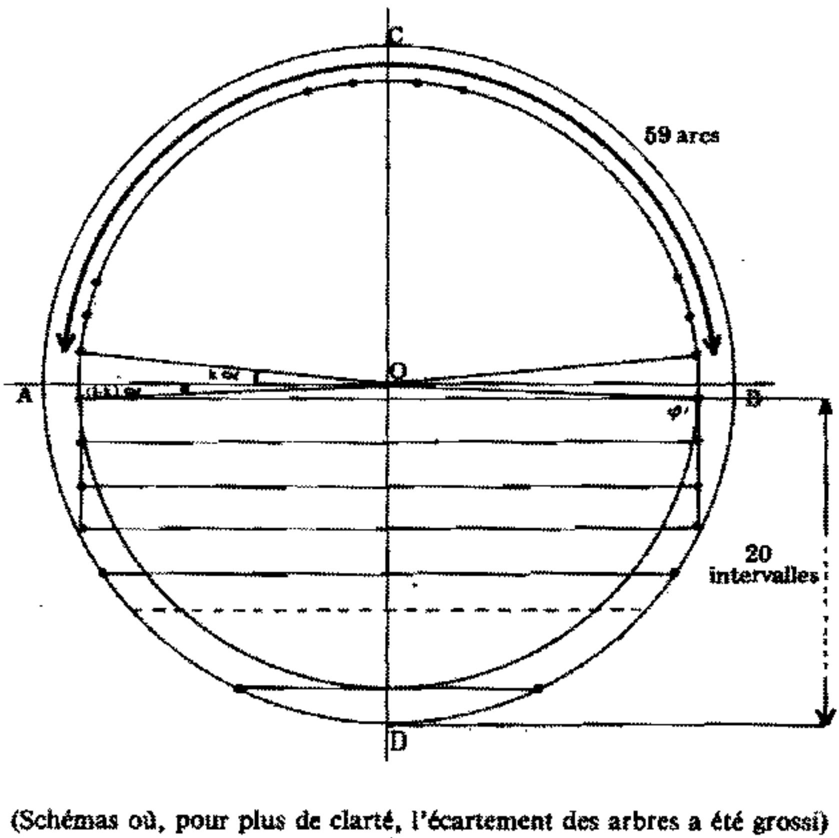
Il est clair qu'avec cette disposition il existe de nombreuses routes, de largeur x, traversant la forêt :

- certaines, "diamétrales", comme I, II,...
- certaines, "tangentielles", comme III, IV,...
- certaines, parallèles au diamètre AB, comme IV, V, ...,

mais on ne peut en trouver de largeur supérieure à x.

Conclusion : La disposition précédente des 100 arbres empêche qu'une route de largeur supérieure à $x = 0{,}024\,688\,8$ unité ne traverse la forêt.





(Schémas où, pour plus de clarté, l'écartement des arbres a été grossi)

Enoncé n° 26 (P. MAMEL, Poitiers)

On prend 2^n allumettes, on forme p tas de a_1, a_2, ..., a_p allumettes respectivement. On a le droit de modifier ces tas de la manière suivante : on double un des tas à l'aide d'allumettes prises dans un seul autre tas. On recommence cette opération jusqu'à ce qu'il n'y ait plus qu'un seul tas. Quel est, en fonction de a_1, a_2, ..., a_p, le nombre minimum de coups nécessaire pour arriver à ce résultat ?

Jean LEMAIRE (Douai) donne une stratégie. Il n'est pas démontré qu'elle est minimale.

1°) On écrit dans le système de numération binaire tous les nombres d'allumettes formant les différents tas.

Donnons, pour simplifier la description de l'étape suivante, les définitions :

Soient deux nombres *impairs* a et b, écrits en numération binaire. S'ils se terminent par la même tranche de k chiffres ($k \geqslant 1$) et que le chiffre précédant cette tranche commune est différent pour les deux nombres, c'est-à-dire 0 pour l'un, 1 pour l'autre, nous dirons qu'ils sont k-semblables. Par exemple, $\overline{110\underline{10011}}$ et $\overline{11\underline{10011}}$ sont 5-semblables.

Et si deux nombres *impairs* sont égaux, nous dirons qu'ils sont ∞-semblables.

2°) On classe ces nombres de la façon suivante :

On écrit par paires successives, en une colonne : s'il en existe, d'abord les nombres ∞-semblables ; puis, successivement, les nombres k-semblables (k maximum), les nombres $(k-1)$-semblables, les nombres $(k\text{-}2)$-semblables, ..., les nombres 1-semblables. Enfin, on écrit les nombres terminés par 0 (dans un ordre quelconque).

3°) On met en évidence, par exemple par des accolades, les paires des premiers nombres ainsi écrits (les nombres impairs). Il est facile de voir qu'il y a obligatoirement un nombre pair de tels nombres.

Puis, on remplace chaque paire ainsi formée par la paire formée
de leur différence, qui peut être nulle
et du produit par $2 = \overline{10}$ de plus petit (ou de l'un deux, s'ils sont égaux).

Les résultats sont portés dans une deuxième colonne. Les nombres pairs de première colonne sont recopiés tels quels.

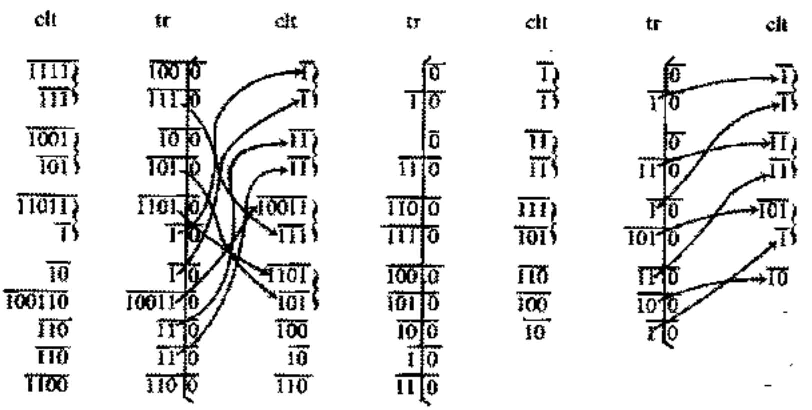
4°) On obtient ainsi une colonne de nombres pairs, c'est-à-dire dont le dernier chiffre à droite est 0. On supprime le "0", qui occupe cette position, pour chaque nombre de la colonne. Si tous les nombres obtenus sont encore terminés par "0", on recommence... Lorsqu'apparaissent des nombres dont le dernier chiffre est "1" (ils sont forcément en nombre pair), on recommence le processus décrit à partir du 2°).

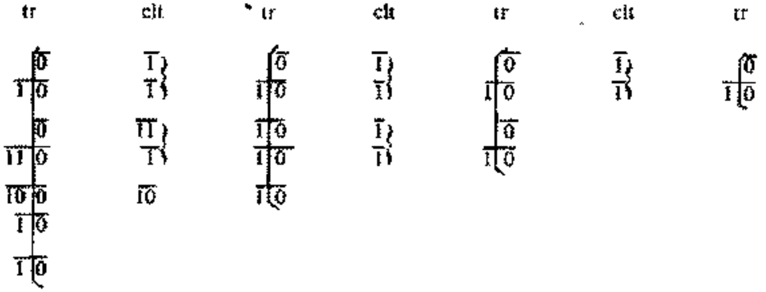
5°) Il est clair que les sommes des nombres des colonnes successives vont en diminuant. Lorsqu'il n'existe plus qu'un "1", le but est atteint. Il ne reste plus qu'à *compter le nombre d'accolades.*

Prenons un exemple : 2^7 = 128 allumettes sont réparties en 11 tas comportant respectivement 1,2,5,6,6,7,9,12,15,27 et 38 allumettes.

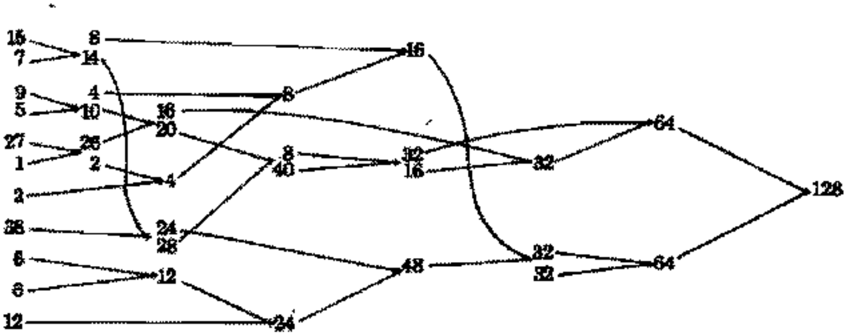
On a :
$1 = \overline{1}$, $2 = \overline{10}$, $5 = \overline{101}$, $6 = \overline{110}$, $7 = \overline{111}$, $9 = \overline{1001}$, $12 = \overline{1100}$,
$15 = \overline{1111}$, $27 = \overline{11011}$, $38 = \overline{100110}$

On forme les colonnes : (clt : classement ; tr : transferts) :





On compte donc *18 coups* pour arriver au résultat. Ils peuvent être explicites par le diagramme suivant :



Je ne peux prouver que la méthode exposée soit la plus rapide, mais je n'ai pas non plus trouvé d'exemple infirmant la conjecture qu'elle emploie le nombre minimum de coups.