4

LES PROBLEMES DE L'A.P.M.E.P.

Pour répondre à la demande de nombreux lecteurs, cette rubrique comprend désormais deux parties.

La première ("PROBLEMES") poursuit la publication d'énoncés inédits avec leurs solutions.

La deuxième ("OLYMPIADES") est consacrée aux exercices déjà posés (en particulier aux diverses Olympiades) ou publiés qui, par leur caractère insolite, incitent à la recherche de solutions.

Les énoncés et les solutions doivent être adressés à :

Charles AUQUE
Université de Clermont II
Département de Mathématiques Pures
B.P. 45 — 63170 AUBIERE

I. Problèmes

ENONCES

Enoncé n° 73 (HIRIART-URRUTY, Clermont-Ferrand)

Soit $\varphi_{u,v}$ la forme linéaire définie sur L $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ par

$$\varphi_{u,v}(A) = (Au, v)$$

où $u \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^m$ et (u,v) le produit scalaire dans $\mathbb{R}^m$.
On note

$$\Phi = \{\varphi_{u,v} \mid u \in \mathbb{R}^n, v \in \mathbb{R}^m\}.$$

Quelle est la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel contenu dans Φ ?

Enoncé n° 74 (EHRHART, Strasbourg)

Quels sont les nombres premiers dans la suite définie par $u_1 = u_2 = 0$ et la relation $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n + 1$?

Enoncé n° 75 (ROYER, Luxembourg)

Quelle est la somme de la série de terme général Arctg $\frac{1}{u_{2n}}$ où u_n est le $n^{\text{ième}}$ terme de la suite de Fibonacci ?

SOLUTIONS

Enoncé n° 64 (RUFFIN, Clermont-Ferrand)

Existe-t-il deux séries numériques semi-convergentes dont le produit, au sens de Cauchy ($c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j$), soit une série absolument convergente ?

Solution (LAGRANGE, Reims)

Un exemple est donné par :

$\{u_n\} = \{1, -1, 1, -1, 0.5, -0.5, 0.5, -0.5, \ldots\}$
$\{v_n\} = \{1, 0, -1, 0, 0.5, 0, -0.5, 0, \ldots\}$.

Plus généralement, soit $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ une série semi-convergente ; on considère les deux séries de terme général u_n et v_n définies par :

$$u_{2n} = a_n \ , \ u_{2n+1} = -a_n \quad ; \quad v_{2n} = (-1)^n a_n \ , \ v_{2n+1} = 0 \ .$$

Dans l'exemple ci-dessus on a pris : $a_{2n} = a_{2n+1} = \frac{1}{n+1}$.

Le terme général w_n du produit de Cauchy des deux séries est donné par

$$w_{4n} = -w_{4n+1} = a_0\, a_{2n} - a_1\, a_{2n-1} + \ldots + a_{2n}\, a_0$$
$$w_{4n+2} = w_{4n+3} = 0$$

On choisit ensuite la suite (a_n) de sorte que la série $\Sigma\, w_{4n}$ soit absolument convergente.

Dans l'exemple ci-dessus, on a : $|w_{4n}| = 0\left(\frac{\operatorname{Log} n}{n^2}\right)$.

Vérifions-le. On peut écrire w_{4n} sous la forme :

$$w_{4n} = 2 \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{n+2-k} - \frac{1}{n+1-k}\right) + \frac{1}{(m+\epsilon)^2}$$

avec $m = \frac{n}{2}$, $\epsilon = 1$ si n est pair ; $m = \frac{n+1}{2}$, $\epsilon = 0$ si n est impair.

L'inégalité $\frac{1}{n+1-k} - \frac{1}{n+2-k} < \frac{1}{m^2}$ permet d'écrire :

$$|w_{4n}| < \frac{2}{m^2} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} + \frac{1}{m^2} \ .$$

Enfin, avec l'inégalité classique $\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} < 1 + \operatorname{Log} m$, on a :

$$|w_{4n}| < \frac{\operatorname{Log} m + 3}{m^2} = 0\left(\frac{\operatorname{Log} n}{n^2}\right).$$

Autres solutions : BLANCHARD (Marseille) qui utilise le développement en série entière de $f(z) = (1+z)(1-z^2)^{-\frac{1}{2}}$ et ses valeurs en i et $-i$ qui sont inverses, et LEMAIRE (Douai).

Enoncé n° 66 (FAYOLLE, Saint-Pourçain-sur-Sioule)

Quels sont les entiers naturels égaux à la somme des factorielles de leurs chiffres (dans l'écriture décimale) ?

Solution (LEMAIRE, Douai)

L'intérêt de ce problème est renforcé par la constatation — non évidente — qu'il peut être résolu sans l'aide d'un ordinateur, ni même d'une calculatrice.

Nous dressons d'abord la table d'addition des factorielles des nombres de 0 à 9 (tableau A) et nous indiquons (tableau B) les sommes des factorielles de trois entiers, quelconques, inférieurs ou égaux à 5.

Nous emploierons la notation suivante : (1 491 840 + A) désignera l'ensemble des sommes du nombre 1 491 840 avec les nombres du tableau A (ou, du moins avec certains d'entre eux, si une restriction est imposée par le contexte).

Nous rechercherons les solutions éventuelles x en les classant suivant le nombre de leurs chiffres.

a) $0 \leqslant x \leqslant 9$ *Deux solutions* évidentes : $x = \boxed{1}$ et $x = \boxed{2}$.

b) $10 \leqslant x \leqslant 99$ La somme des factorielles de deux chiffres a et b, $b \leqslant a$, est un nombre de deux chiffres si et seulement si $a = 4$ ou si $a = b = 3$.

Il n'existe *pas de solution* de ce type d'après le tableau A.

c) $100 \leqslant x \leqslant 999$ Un tel nombre, pour être solution, doit comporter au moins un chiffre supérieur ou égal à 5 et n'en comporter aucun supérieur ou égal à 6. Nous avons donc à examiner les nombres de trois chiffres du tableau B qui comportent au moins un 5.

Il n'en existe qu'un : $\boxed{145}$. C'est *une solution*, car

$$145 = 5! + 4! + 1!$$

d) $1000 \leqslant x \leqslant 9999$ Les chiffres apparaissant dans l'écriture de x doivent être au plus égaux à 7. Plus précisément, un au plus d'entre eux peut être

7. D'autre part, deux d'entre eux doivent être égaux ou supérieurs à 6. Nous avons donc à examiner :

$$x = 2\times 6! + a! + b! = 1440 + a! + b! \text{ avec } a \leqslant 6,\ b \leqslant 6$$

$$\text{et } x = 6! + 7! + a! + b! = 5760 + a! + b! \text{ avec } a \leqslant 6,\ b \leqslant 6 .$$

Les seuls éléments de $(1440 + A)$ dont l'écriture comporte deux 6 sont

$$1466 = 1440 + 26 = 6! + 6! + 2! + 4! \ ,\ 1566 = 6! + 6! + 3! + 5!$$

$$\text{et } 2166 = 6! + 6! + 3! + 6!$$

Ils ne conviennent pas.

Les seuls éléments de $(5760 + A)$ qui comportent un 6 et un 7 sont

$$5762 = 7! + 6! + (0! \text{ ou } 1!) + (0! \text{ ou } 1!) \quad 5763 = 7! + 6! + 2! + (0! \text{ ou } 1!)$$

$$5764 = 7! + 6! + 2! + 2! \qquad 5767,\ 5768 \text{ et } 5769 .$$

Ils ne conviennent pas (les trois derniers, parce qu'ils comportent deux 7 ou un 8 ou un 9).

En résumé, *pas de solution*.

e) **$10\,000 \leqslant x \leqslant 99\,999$**

Pour que l'on ait $x \leqslant 99\,999$, l'écriture décimale de x ne doit pas comporter de 9, ni plus de deux 8.

Pour que l'on ait $x \geqslant 10\,000$, elle doit comporter deux 7 et des chiffres plus petits, ou deux 8 et des chiffres plus petits, ou un 8 et des chiffres plus petits.

Nous avons donc à examiner les sommes :

α $\quad 2\times 8! + a! + b! + c! = 80\,640 + a! + b! + c!$ avec $a,b,c \leqslant 7$

β $\quad 8! + a! + b! + c! + d! = 40\,320 + a! + b! + c! + d!$ avec $a,b,c,d \leqslant 7$

γ $\quad 2\times 7! + a! + b! + c! = 10\,080 + a! + b! + c!$ avec $a,b,c \leqslant 7$

α $\quad 80\,640 + a! + b! + c!$ avec $a,b,c \leqslant 7$.

Si $a = 7$, il vient $85\,680 + b! + c!$ avec $b,c \leqslant 7$.

Dans $(85\,680 + A)$ les seuls éléments comportant deux 8 et un 7 sont :

$$85\,687 = 85\,680 + 7 = 8! + 8! + 7! + 3! + (0! \text{ ou } 1!)$$

$$\text{et } 85\,728 = 85\,680 + 48 = 8! + 8! + 7! + 4! + 4!$$

Ils ne conviennent pas.

Si $a = 6$, il vient $81\,360 + b! + c!$ avec $b,c \leqslant 6$.

Dans $(81\,360 + A)$ nous trouvons quatre nombres comportant deux 8 et un 6 :

$$\begin{aligned} 81\,368 &= 81\,360 + 8 &&= 8! + 8! + 6! + 3! + 2! \\ 81\,386 &= 81\,360 + 26 &&= 8! + 8! + 6! + 4! + 2! \\ 81\,486 &= 81\,360 + 126 &&= 8! + 8! + 6! + 5! + 3! \\ 82\,086 &= 81\,360 + 726 &&= 8! + 8! + 6! + 6! + 3! \end{aligned}$$

Ils ne conviennent pas.

Si $a \leq 5$ nous devons avoir $80\,640 + a! + b! + c!$ avec $a, b, c \leq 5$.

Or, l'addition de 80 640 avec les nombres du tableau B conserve le 6 souligné ou le transforme en 7, ou en 8. Il n'y a donc pas de solution.

(β) $40\,320 + a! + b! + c! + d!$ avec $a, b, c, d \leq 7$.

Si $a = 7$, il vient $45\,3\underline{60} + b! + c! + d!$ avec $b, c, d \leq 7$.

Si $b = 7$ cela devient $50\,400 + c! + d!$ avec $c, d \leq 7$

Dans $(50\,400 + A)$ il n'existe pas de nombre comportant deux 7 et un 8

Si $b = 6$, nous avons $46\,080 + c! + d!$ avec $c, d \leq 6$

Dans $(46\,080 + A)$ il n'existe pas de nombre comportant un 6, un 7 et un 8.

Si $b = 5$, nous avons $45\,480 + c! + d!$ avec $c, d \leq 5$

Seul candidat : $45\,487 = 8! + 7! + 5! + 3! + (0!$ ou $1!)$. Il ne convient pas.

Si $b \leq 4$, il faut avoir $40\,3\underline{60} + b! + c! + d!$ avec $b, c, d \leq 4$.

Or, l'addition de 60 aux nombres inférieurs à 100 du tableau B ne permet d'obtenir les chiffres 7 et 8 que pour :

$$40\,360 + 18 = 40\,378 = 8! + 7! + 6! + 3! + 3!$$

$$\text{et } 40\,360 + 27 = 40\,387 = 8! + 7! + 4! + 2! + (0! \text{ ou } 1!) .$$

Ces nombres ne conviennent pas.

Si $a = 6$, il vient $41\,040 + b! + c! + d!$ avec $b, c, d \leq 6$.

Si $b = 6$, nous obtenons $41\,760 + c! + d!$ avec $c, d \leq 6$

Aucun élément de $(41\,760 + A)$ ne comporte un 8 et deux 6.

Si $b = 5$, nous obtenons $41\,160 + c! + d!$ avec $c, d \leq 5$

Aucun élément de $(41\,160 + A)$ ne comporte un 8, un 6 et un 5.

Si $b \leq 4$, nous obtenons $41\,0\underline{40} + b! + c! + d!$ avec $b, c, d \leq 4$.

Or l'addition de 40 aux nombres inférieurs à 100 du tableau B ne permet pas d'obtenir les chiffres 6 et 8 sauf dans le cas de :

$$41\,040 + 28 = 41\,068 = 8! + 6! + 4! + 2! + 2! .$$

Ce nombre ne convient pas.

Si $a = 5$, il vient $40\,440 + b! + c! + d!$ avec $b, c, d \leq 5$.

Si $b = 5$, cela devient $40\,560 + c! + d!$ avec $c, d \leq 5$.

Seul candidat (comportant un 8 et deux 5) : $40\,585 = 40\,560 + 25$; comme $40\,585 = 8! + 5! + 5! + 4! + (0!$ ou $1!)$, on voit que

$$x = \boxed{40\,585} \quad \text{est } \textit{solution}.$$

Si $b \leq 4$, nous avons à examiner $40\,\underline{440} + b! + c! + d!$ avec $b, c, d \leq 4$.

Or l'addition de 440 aux nombres inférieurs à 100 du tableau B ne permet pas d'obtenir les chiffres 8 et 5, sauf pour :

$40\,440 + 18 = 40\,458 = 8! + 5! + 3! + 3! + 3!$ qui ne convient pas.

Si $a = 4$, il vient $40\,344 + b! + c! + d!$ avec $b, c, d \leq 4$.

Les éléments de $(40\,344+\mathrm{A})$ comportant les chiffres 4 et 8 sont :

$$40\,344+4 = 40\,348 = 8!+4!+2!+(0! \text{ ou } 1!) + (0! \text{ ou } 1!)$$
$$40\,344+36 = 40\,480 = 8!+4!+4!+3!+3!$$
$$\text{et } 40\,344+54 = 40\,3\underline{9}8 .$$

Il ne conviennent pas.

Si $a\leqslant 3$, $40\,320+a!+b!+c!+d!$, avec $a,b,c,d\leqslant 3$, est impossible car les sommes ainsi formées vont commencer par un 4.

(γ) $10\,080+a!+b!+c!$ avec $a,b,c\leqslant 7$.

Si $a=7$, on a $15\,120+b!+c!$ avec $b,c\leqslant 7$
Aucun élément de $(15\,120+\mathrm{A})$ ne comporte trois 7.

Si $a=6$, on a $10\,800+b!+c!$ avec $b,c\leqslant 6$
Aucun élément de $(10\,800+\mathrm{A})$ ne comporte deux 7 et un 6.

Si $a=5$, on a $10\,200+b!+c!$ avec $b,c\leqslant 5$
Aucun élément de $(10\,200+\mathrm{A})$ ne comporte deux 7 et un 5.

Si $a\leqslant 4$, on a $10\,080+a!+b!+c!$ avec $a,b,c\leqslant 4$
Aucun élément de $(10\,080+\mathrm{B})$ ne comporte deux 7.

En résumé, il n'existe qu'*une solution* dans l'intervalle étudié.

f) $100\,000\leqslant x\leqslant 999\,999$

Un tel nombre doit comporter
ou au moins un 9 et pas plus de deux
ou au moins trois 8 (car $2\times 8!+3\times 7!+6!=96\,480<100\,000$ et $2\times 8!+4\times 7!=100\,800$ ne convient pas).

Nous avons donc à essayer :

1 $3\times 8!+a!+b!+c! = 120\,960+a!+b!+c!$ avec $a,b,c\leqslant 7$
2 $4\times 8!+a!+b! = 161\,280+a!+b!$ avec $a,b\leqslant 7$
3 $5\times 8!+a! = 201\,600+a!$ avec $a\leqslant 7$
4 $6\times 8! = 241\,920$ il ne convient pas
5 $2\times 9!+a!+b!+c!+d! = 725\,760+a!+b!+c!+d!$ avec $a,b,c,d\leqslant 8$
6 $9!+a!+b!+c!+d!+e! = 362\,880+a!+b!+c!+d!+e!$ avec $a,b,c,d,e\leqslant 8$

(1) $120\,960+a!+b!+c!$ avec $a,b,c\leqslant 7$

Si $a=7$, il vient $126\,000+b!+c!$ avec $b,c\leqslant 7$
Si $a=6$, il vient $121\,680+b!+c!$ avec $b,c\leqslant 6$
Si $a\leqslant 5$, il vient $120\,960+b!+c!$ avec $a,b,c\leqslant 5$
Aucun élément de $(126\,000+\mathrm{A})$, ni de $(121\,680+\mathrm{A})$, ni de $(120\,960+\mathrm{B})$ ne comporte trois 8.

(2) $161\,280+a!+b!$ avec $a,b\leqslant 7$.
Aucun élément de $(161\,280+\mathrm{A})$ ne comporte quatre 8.

③ $201\,600 + a!$ avec $a \leqslant 7$.
Impossible d'obtenir une somme dont l'écriture comporte cinq 8.

⑤ $725\,760 + a! + b! + c! + d!$ avec $a,b,c,d \leqslant 8$.

Si $a = 8$, il vient $766\,080 + b! + c! + d!$ avec $b,c,d \leqslant 8$

Si $b = 8$, on a $806\,400 + c! + d!$ avec $c,d \leqslant 8$
Aucun élément de $(806\,400 + A)$ ne comporte deux 9 et un 8.

Si $b = 7$, on a $811\,440 + c! + d!$ avec $c,d \leqslant 7$
Aucun élément de $(811\,440 + A)$ ne comporte deux 9, un 8 et un 7.

Si $b = 6$, on a $766\,800 + c! + d!$ avec $c,d \leqslant 6$ et si $b \leqslant 5$
$766\,080 + b! + c! + d!$ avec $b,c,d \leqslant 5$
Or, aucun élément de $(766\,800 + A)$, ni de $(766\,080 + B)$ ne comporte deux 9.

Si $a = 7$, il vient $730\,800 + b! + c! + d!$ avec $b,c,d \leqslant 7$.

Si $b = 7$, cela devient $735\,840 + c! + d!$ avec $c,d \leqslant 7$

Si $b = 6$, cela devient $731\,560 + c! + d!$ avec $c,d \leqslant 6$

Si $b \leqslant 5$, cela devient $730\,800 + b! + c! + d!$ avec $b,c,d \leqslant 5$
Or aucun élément de $(735\,840 + A)$, ni de $(731\,560 + A)$, ni de $(730\,800 + B)$ ne comporte deux 9.

Si $a \leqslant 6$, il vient $725\,760 + a! + b! + c! + d!$ avec $a,b,c,d \leqslant 6$.
Il n'est pas possible d'altérer le 7 initial par de telles additions, donc il n'existe pas de solution.

⑥ $362\,880 + a! + b! + c! + d! + e!$ avec $a,b,c,d,e \leqslant 8$.

Si $a = b = c = 8$, on obtient $483\,840 + d! + e!$ avec $d,e \leqslant 8$
Cette somme commencera par un 4 ou un 5. On a donc

$$483\,864 + e! \quad \text{ou} \quad 483\,960 + e! \quad \text{avec } e \leqslant 8.$$

Aucune telle somme ne comporte trois 8 et un 9.

Si $a = b = 8$ et $c < 8$, on obtient $\underline{44}3\,520 + c! + d! + e!$ avec $c,d,e \leqslant 7$.
Cette somme commence par 44. D'où : $443\,568 + e!$ avec $e \leqslant 7$.
Or, aucune telle somme ne comporte deux 8 et un 9.

Si $a = 8$ et $b,c,d,e \leqslant 7$, on obtient $430\,200 + b! + c! + d! + e!$.
Cette somme commence par 4. D'où : $403\,224 + c! + d! + e!$* avec $c,d,e \leqslant 7$.
Or $c! + d! + e! \leqslant 3 \times 7! = 15\,120$. Le second chiffre de la somme* est donc 0 ou 1. D'où $403\,225 + d! + e!$ avec $d,e \leqslant 7$.
Les seuls éléments de $(403\,225 + A)$ qui comportent un 9 et un 8 sont :

$$403\,225 + 5064 = 408\,289 \quad \text{et} \quad 403\,225 + 5760 = 408\,985\ .$$

Ils ne conviennent pas puisqu'ils comportent deux 8.

Si $a = 7$, on a $367\,920 + b! + c! + d! + e!$ avec $b,c,d,e \leqslant 7$.
Donc une telle somme commence par 3.
D'où $367\,926 + c! + d! + e!$ avec $c,d,e \leqslant 7$.
Si $c = 7$, il vient $372\,966 + d! + e!$ avec $d,e \leqslant 7$

Les éléments de $(372\ 966+\mathrm{A})$ qui comportent un 9 et deux 7 sont :

$372\ 966+\ 4 = 372\ 970 = 9!+7!+3!+7!+2!+2!$
$372\ 966+\ 7 = 372\ 973 = 9!+7!+3!+7!+3!+(0!\text{ ou }1!)$
$372\ 966+\ 8 = 372\ 974 = 9!+7!+3!+7!+2!+3!$
$372\ 966+12 = 372\ 978 = 9!+7!+3!+7!+3!+3!$

Ils ne conviennent pas.

Si $c \leqslant 6$, il vient $367\ 926+c!+d!+e!$ avec $c,d,e \leqslant 6$
Si $c=d=6$, on a $367\ 926+2160 = 370\ 086$ qui ne convient pas.
Sinon, la somme $367\ 926+c!+d!+e!$ a pour deuxième chiffre : 6.
D'où $368\ 646+d!+e!$ avec $d,e \leqslant 6$.
Or, les seuls éléments de $(368\ 646+\mathrm{A})$ qui comportent un 9, un 7 et un 6 sont :

$368\ 646+144 = 368\ 790 = 9!+7!+6!+3!+4!+5!$
$368\ 646+721 = 369\ 367 = 9!+7!+6!+3!+6!+(0!\text{ ou }1!)$
$368\ 646+726 = 369\ 372 = 9!+7!+6!+3!+6!+3!$

Ils ne conviennent pas.

Si $a=6$, on a $363\ 600+b!+c!+d!+e!$ avec $b,c,d,e \leqslant 6$.

Une telle somme commence par 3, d'où $363\ 606+c!+d!+e!$ avec $c,d,e \leqslant 6$.

Si $c=6$, il vient $364\ 326+d!+e!$ avec $d,e \leqslant 6$
Or, aucun élément de $(364\ 326+\mathrm{A})$ ne comporte un 9 et deux 6.

Si $c \leqslant 5$, il vient $363\ 606+c!+d!+e!$ avec $c,d,e \leqslant 5$
Une telle somme a pour troisième chiffre : 3.
D'où $363\ 612+d!+e!$ avec $d,e \leqslant 5$.
Le seul élément de $(363\ 612+\mathrm{A})$ à comporter un 9 est :

$363\ 612+7 = 363\ 619 = 9!+6!+3!+3!+3!+(0!\text{ ou }1!)$

Il ne convient pas.

Si $a \leqslant 5$, on a $362\ 880+a!+b!+c!+d!+e!$ avec $a,b,c,d,e \leqslant 5$.

Le second chiffre d'une telle somme étant obligatoirement 6, il n'existe pas de solution.

En résumé *pas de solution* dans l'intervalle.

g) $1\ 000\ 000 \leqslant x \leqslant 9\ 999\ 999$

Un tel nombre doit comporter au moins trois 9, car

$$2\times 9!+5\times 8! = 927\ 360 < 1\ 000\ 000\ .$$

On a à essayer :

- $6\times 9!+a! = 2\ 177\ 280+a!$ avec $a \leqslant 9$.

  Les sommes correspondantes sont comprises entre 2 177 281 et 2 540 160 et ne peuvent comporter six 9.

- $5\times 9!+a!+b! = 1\ 814\ 400+a!+b!$ avec $a,b \leqslant 8$.

  Aucun de ces nombres ne comporte cinq 9 car le seul nombre du tableau A susceptible de transformer par addition le 1 souligné de $1\ 8\underline{1}4\ 400$ en 9 est 80 640. Il donne 1 895 040 qui ne comporte qu'un 9.

• $4 \times 9! + a! + b! + c! = 1\ 451\ 520 + a! + b! + c!$ avec $a,b,c \leqslant 8$.

Si $a=8$, il vient $1\ 491\ 840 + b! + c!$ avec $b,c \leqslant 8$.
Aucun élément de $(1\ 491\ 840 + \mathrm{A})$ ne comporte quatre 9.

Si $a=7$, il vient $1\ 45\underline{2}\ 240 + b! + c!$ avec $b,c \leqslant 7$

Si $a=6$, il vient $1\ 45\underline{1}\ 640 + b! + c!$ avec $b,c \leqslant 6$

Si $a \leqslant 5$, il vient $1\ 45\underline{1}\ 520 + a! + b! + c!$ avec $a,b,c \leqslant 5$

Or, dans aucune de ces sommes le chiffre des milliers ne peut devenir 9 :

dans le premier cas, le 2 peut devenir un 8 au maximum ;
dans les deux autres, le 1 est, soit conservé, soit transformé en 2.

• $3 \times 9! + a! + b! + c! + d! = 1\ 088\ 640 + a! + b! + c! + d!$ avec $a,b,c,d \leqslant 8$.

Une telle somme commence par 1, d'où $1\ 088\ 641 + a! + b! + c!$ avec $a,b,c \leqslant 8$.

Si $a=8$, il vient $1\ 128\ 961 + b! + c!$ avec $b,c \leqslant 8$
Aucun élément de $(1\ 128\ 961 + \mathrm{A})$ ne comporte trois 9 et un 8.

Si $a=7$, il vient $1\ 093\ 681 + b! + c!$ avec $b,c \leqslant 7$

Si $a=6$, il vient $1\ 089\ 361 + b! + c!$ avec $b,c \leqslant 6$

Si $a \leqslant 5$, il vient $1\ 088\ 641 + a! + b! + c!$ avec $a,b,c \leqslant 5$

Or, aucun élément de $(1\ 093\ 681 + \mathrm{A})$, ni de $(1\ 089\ 361 + \mathrm{A})$, ni de $(1\ 088\ 641 + \mathrm{B})$ ne peut comporter trois 9.

En résumé, il n'existe *pas de solution*.

h) $x \geqslant 10\ 000\ 000$

Soit un nombre de m chiffres, avec $m \geqslant 8$.

Ce nombre est donc compris entre 10^{m-1} et 10^m.
La somme des factorielles de ses chiffres est inférieure ou égale à

$$m \times 9! = 362\ 880m < 10^6 m$$

Or, pour $m \geqslant 8$, on a $10^6 m < 10^{m-1}$.
Il n'existe donc *pas de solution de plus de sept chiffres.*

CONCLUSION : *Seuls quatre entiers sont somme des factorielles de leurs chiffres. Ce sont :*

$$\boxed{1\ ,\ 2\ ,\ 145\ \text{ et }\ 40\ 585}$$

Pour terminer, remarquons que cette méthode a nécessité la "comparaison" (recherche de sommes comportant des chiffres donnés) d'une cinquantaine de nombres à certains éléments des tableaux A ou B. Une trentaine d'entiers seulement ont été effectivement décomposés en somme de factorielles.

TABLEAU A ($a! + b!$)

b	$a =$	0 ou 1	2	3	4	5	6	7	8
	$b!$ / $a! =$	1	2	6	24	120	720	5040	40320
0 ou 1	1	2							
2	2	3	4						
3	6	7	8	12					
4	24	25	26	30	48				
5	120	121	122	126	144	240			
6	720	721	722	726	744	840	1440		
7	5040	5041	5042	5046	5064	5160	5760	10080	
8	40320	40321	40322	40326	40344	40440	41040	45360	80640

TABLEAU B ($a! + b! + c!$)

Pour $a, b, c \leqslant 4$

3	4	5	6	8	9				
10	13	14	18						
26	27	28	31	32	36	49	50	54	72

Pour $a, b, c \leqslant 5$
les mêmes, plus :

122	123	124	127	128	132	145	146	150	168
241	242	246	264						
360									

Autres solutions : GAONAC'H (Le Pouliguen) et PONASSE (Lyon).

Remarque : Ce problème n'est pas inédit ; CUCULIERE (Paris) m'a fourni un article de POOLE (Texas Tech University) dans le Mathematics Magazine de Nov-Dec 1971 donnant une solution qui utilise un ordinateur pour l'étude des nombres de 1 à 2 000 000.

II. Olympiades

Exercice 1 (CAPES)

Les centres des cercles inscrits des quatre triangles dont les sommets sont pris parmi quatre points cocycliques forment un rectangle.

Exercice 2 (CAPES)

On donne, dans un plan affine euclidien, n points $P_1, \dots P_n$ et un cercle C de rayon 1. Démontrer qu'il existe un point de C dont le produit des distances aux P_i est supérieur ou égal à 1.