9

LES PROBLEMES DE L'A.P.M.E.P.

Pour répondre à la demande de nombreux lecteurs, cette rubrique comprend désormais deux parties.

La première ("PROBLEMES") poursuit la publication d'énoncés inédits avec leurs solutions.

La deuxième ("OLYMPIADES") est consacrée aux exercices déjà posés (en particulier aux diverses Olympiades) ou publiés qui, par leur caractère insolite, incitent à la recherche de solutions.

Les énoncés et les solutions doivent être adressés à :

Charles AUQUE
Université de Clermont II
Département de Mathématiques Pures
B.P. 45 — 63170 AUBIERE

I. Problèmes

ENONCES

Enoncé n° 76 (CUCULIERE, Paris)

On considère un pentagone plan ABCDE tel que AB soit parallèle à CE, BC à AD, CD à BE et DE à AC.

Que peut-on dire du pentagone si les trois première bandes ont même largeur ?

Que peut-on dire du pentagone si les deux premières bandes d'une part, et les deux dernières d'autre part, ont même largeur ?

Enoncé n° 77 (LEMAIRE, Douai)

Quels sont les nombres premiers dont le cube augmenté d'un carré est un bicarré ?

SOLUTIONS

Enoncé n° 67 (GAUTHIER, Perpignan)

Pour quelles valeurs du naturel n la fraction $\dfrac{2n^7+1}{3n^3+2}$ est-elle simplifiable ?

Solution (RIVET, Rennes)

La technique de la division euclidienne nous donne successivement les deux relations :

$$9(2n^7+1) = (6n^4-4n)(3n^3+2)+(8n+9)$$
$$512(3n^3+2) = (8n+9)(192n^2-216n+243) - 1163$$

ce qui montre qu'un diviseur commun à $2n^7+1$ et $3n^3+2$ divise $8n+9$ et 1163.

La méthode du crible montre facilement que 1163 est premier. Tout revient à chercher les n tels qu'il existe a vérifiant.

$$8n+9 = a.1163$$

ou $$a.1163-9 \equiv 0 \mod 8$$

c'est-à-dire $$3a \equiv 1 \mod 8$$

Puisque a est inversible dans $\mathbb{Z}/(8)$, on obtient $a = 3 \mod 8$, c'est-à-dire $a = 3+8k$ et $n = 435+k1163$.

Par exemple, pour $n = 435$,

$3n^3+2 = 82\,312\,875 = 1163 \times 212\,329$

$2n^7+1 = 5\,894\,606\,169\,966\,093\,751 = 1163 \times 5\,068\,448\,985\,353\,477$

On en déduit que pour tout n la fraction proposée est effectivement simplifiable.

Autres solutions : ADAD (Sceaux), BERMONT (Orsay), BIGOT (Equeudreville), BONNEFOND (Tonnay-Charente), BOUYSSEL (Mohammedia), BOY (Saint-Loubès), CANET (Villeneuve), CARON (Ajaccio), COLLIGNON (Narbonne), CUCULIERE (Paris), COQUET (Valenciennes), DOUSSAIN (Bourg-la-Reine), FLAMBARD (Versailles), FRAISSE (Lézignan), INGARAO (Meknès), KAPLAN (Nancy), LAGROST (Altkirch), LAVENIR (Montceau-les-Mines), LEMAIRE (Douai), NOE (Marseille), QUENTON (Madrid), PONASSE (Lyon), RAPIN (Le Mee sur Seine), REDOULES (Castelsarrasin), ROYER (Luxembourg), SALLES (Cannes), TISSIER (Montfermeil) et l'auteur.

Enoncé n° 68 (LEMAIRE, Douai)

On donne un triangle ABC du plan affine euclidien. Où doit être situé le point M pour que l'aire du triangle dont les sommets sont les symétriques de M par rapport aux côtés du triangle ABC soit égale à l'aire du triangle ABC ?

Solution (TISSIER, Montfermeil)

Les symétries-droites étant des applications affines, les coordonnées des symétriques de M par rapport aux trois côtés sont des fonctions affines de celles de M. L'aire d'un triangle étant donnée par un déterminant, on a, en désignant par S(M) l'aire du triangle associé à M :

$$S(M) = |P(x,y)|$$

où P est un polynome de degré au plus 2.

Si M est sur le cercle circonscrit à ABC, $S(M) = 0$ d'après le théorème de Simpson (ou Steiner). Il existe donc un nombre k tel que

$$P(x,y) = k(x^2 + y^2 - R^2)$$

si le repère orthonormé a son origine au centre O du cercle circonscrit.

Si M est en O, on a $S(M) = \text{Aire}(ABC)$. On obtient ainsi :

$$S(M) = \frac{\text{Aire}(ABC)}{R^2} |x^2 + y^2 - R^2|$$

L'ensemble des points M tels que $S(M) = \text{Aire}(ABC)$ est donc défini par

$$x^2 + y^2 - R^2 = \pm R^2$$

On trouve le point O et le cercle de centre O et de rayon $R\sqrt{2}$.

Autres solutions : J'ai reçu des solutions très diverses.

Analytiques : ADAD (Sceaux), DOUSSAIN (Bourg-la-Reine), FRAISSE (Lézignan), MANAC'H (Lorient) et l'auteur.

Par le calcul vectoriel : CHRETIEN (Villemomble), CUCULIERE (Paris), DOUSSAIN (Bourg-la-Reine), NOE (Marseille) et SALLES (Cannes).

Par les nombres complexes : ROYER (Luxembourg) et TIXIER (Clermont-Ferrand).

Certains remarquent que le problème se généralise et résolvent

$$\text{Aire}(A'B'C') = k \text{ Aire}(ABC).$$

Enoncé n° 69 (FULGENCE, Dijon)

n chevaux ($n \geqslant 3$) numérotés de 1 à n participent à une course comptant pour le tiercé. Un tiercé est additif si, parmi les numéros des trois premiers arrivés, l'un est la somme des deux autres. Tous les chevaux ayant a priori d'égales possibilités, quelle est la probabilité pour que le tiercé soit additif ?

Solution (AÏDI, Salammbo)

Dans le désordre, un tiercé additif est de la forme :

$$\{ i, s-i, s \}$$

où $s \in [3\,;n]$ et $\begin{cases} i \in [1\,;\frac{s}{2} - 1] & \text{si } s \text{ est pair} \\ i \in [1\,;\frac{s-1}{2}] & \text{si } s \text{ est impair} \end{cases}$

Il en résulte que :

— dans le cas où n est pair, le nombre total de tiercés additifs dans l'ordre est :

$$3! \times 2\,[1 + 2 + \ldots + (\frac{n}{2} - 1)] = \frac{3n(n-2)}{2}$$

— dans le cas où n est impair, ce nombre est :

$$3! \times 2\,[1 + 2 + \ldots + (\frac{n-1}{2} - 1)] + 3! \times \frac{n-1}{2} = \frac{3(n-1)^2}{2}$$

Et comme le nombre total de tiercés est dans les deux cas

$$A_n^3 = n(n-1)(n-2)$$

la probabilité pour qu'un tiercé soit additif est :

pour n pair $\qquad p = \dfrac{3}{2(n-1)}$

pour n impair $\qquad p = \dfrac{3(n-1)}{2n(n-2)}$

Autres solutions : ASSELIN DE BEAUVILLE (Joué-les-Tours), BARBERIS (Menton), BECQUES (Rabat), BERMOND (Orsay), BOUYSSEL (Maroc), BRETNACHER (Marcigny), CANET (Villeneuve), CHARPY (Lans-en-Vercors), CHAUVIERE (St Maixent l'Ecole), CHRETIEN (Villemomble), CUCULIERE (Paris), DENOYELLE (Caudry), FINK (Saint-Priest), FRAISSE (Lézignan-Corbières), GRANCHER (Bois Guillaume), INGARAO (Maroc), LEMAIRE (Douai), PARZYSZ (Fontenay-aux-Roses), QUENTON (Madrid), SAGNES (Nice), SALLES (Cannes), TIBERI (Montbéliard), TISSIER (Montfermeil) et l'auteur.

II. Olympiades

Exercice n° 3

Le chiffre des unités, en base douze, de tout carré est lui-même un carré. Quelles sont les autres bases jouissant de cette propriété ?

Exercice n° 4

Dans un carré de 7 × 7 carreaux, on choisit n centres de carreaux. Parmi ceux-ci, on ne peut pas trouver quatre points qui sont sommets d'un rectangle aux côtés parallèles à ceux du carré. Quel est le n maximum vérifiant cette propriété ?