8

LES PROBLEMES DE L'A.P.M.E.P.

Pour répondre à la demande de nombreux lecteurs, cette rubrique comprend désormais deux parties.

La première ("PROBLEMES") poursuit la publication d'énoncés inédits avec leurs solutions.

La deuxième ("OLYMPIADES") est consacrée aux exercices déjà posés (en particulier aux diverses Olympiades) ou publiés qui, par leur caractère insolite, incitent à la recherche de solutions.

Les énoncés et les solutions doivent être adressés dactylographiés à :

Charles AUQUE
Université de Clermont II
Département de Mathématiques Pures
B.P. 45 — 63170 AUBIERE

Problèmes

ENONCES

Enoncé n° 82 (BELGY, Clermont-Ferrand)

Les chiffres de l'écriture, dans une base de numération b, d'un nombre premier p sont (en partant du chiffre des unités) : a_0, a_1, ...

Démontrer que le polynome $\Sigma a_n X^n$ est irréductible sur $\mathbf{Z}$.

Enoncé n° 83 (AUQUE, Clermont-Ferrand)

De combien de façons peut-on placer les nombres 1, 2, 3, 4, 5 et 6, dans un carré 6×6, de sorte que chaque nombre apparaisse une fois dans chaque ligne, dans chaque colonne et dans chacune des deux diagonales ?

SOLUTIONS

Enoncé n° 76 (CUCULIERE, Paris)

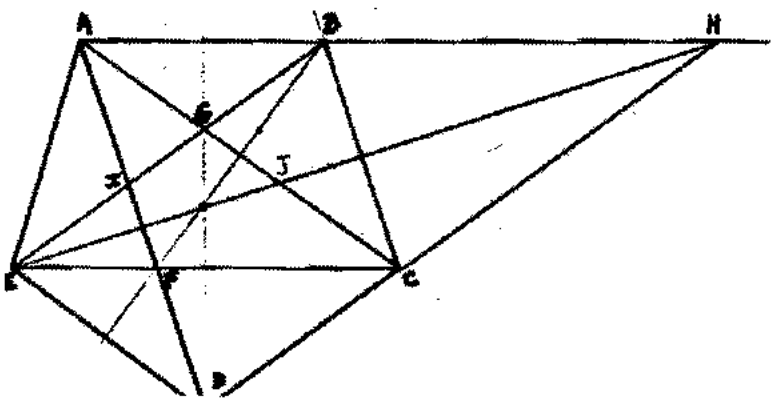
On considère un pentagone plan ABCDE tel que AB soit parallèle à CE, BC à AD, CD à BE et DE à AC.

Que peut-on dire du pentagone si les trois premières bandes ont même largeur ?

Que peut-on dire du pentagone si les deux premières bandes d'une part, et les deux dernières d'autre part, ont même largeur ?

Solution (CHRETIEN, Villemomble)

On désigne par F, G, H, I, J les intersections des droites AD et EC, AC et BE, AB et CD, AD et CE, HE et AC.



Dans la première hypothèse :

ABCF et BIDC sont des losanges. Donc $AB = BC = CD$.
BHCE est un losange, donc $HB = HC$, (EH) est médiatrice de [BC] et bissectrice de $\widehat{AHD}$. $HB = HC$ et $AB = CD$, donc $HA = HD$; la bissectrice de $\widehat{AHD}$ est médiatrice de [AD]. Donc $AE = ED$.

On peut en conclure que AEDJ est un losange ; la quatrième bande a la même largeur que les trois premières ; il s'agit d'un "nœud doré", donc le pentagone est régulier ; *ou* préférer une démonstration analogue à la précédente, (BF) est médiatrice de [AC] puisque ABCF est un losange, $\widehat{BAC} = \widehat{BCA}$, $\widehat{FED} = \widehat{BAC}$ et $\widehat{FDE} = \widehat{BCA}$ (angles à côtés parallèles), donc $\widehat{FED} = \widehat{FDE}$; (BF), médiatrice de [AC], est perpendiculaire à (ED) ; le triangle EFD étant isocèle, (BF) est médiatrice de [ED]. AE et CD sont symétriques par rapport à (BF).

Dans la deuxième hypothèse :

GCDE est un losange, (GD) est médiatrice de [EC], $CD = DE$.
ABCF est un losange, (BF) est médiatrice de [AC], $AB = BC$.
$\widehat{GAB} = \widehat{GCE}$ (alternes-internes) ; $\widehat{ABG} = \widehat{ECD}$ (côtés parallèles). AGB est isocèle et (GD) est médiatrice de [AB]. Par symétrie par rapport à GD , $AE = BC$. De même, (BF), médiatrice de [AC], est aussi médiatrice de [DE] et par symétrie $AE = CD$. Le pentagone ABCDE est régulier.

Autres solutions : LEMAIRE (Douai), SAMBARD (Saint-Quentin) et l'auteur.

Olympiades

Exercice n° 8

Démontrer qu'une droite divisant un triangle en deux polygones de même aire et de même périmètre passe par le centre du cercle inscrit au triangle.

Démontrer une propriété analogue pour un polygone quelconque dans lequel on peut inscrire un cercle.

SOLUTIONS

Exercice n° 3

Le chiffre des unités, en base douze, de tout carré, est lui-même un carré. Quelles sont les autres bases jouissant de cette propriété ?

Solution

Les bases qui conviennent sont 2, 3, 4, 5, 8, 12 et 16.
Les congruences utilisées sont prises modulo la base b.

Cas 1 : $b=2n+1$

$(n-1)^2 \equiv n^2+2$.
Comme 2 n'est pas la différence de deux carrés, on a :

- ou $n^2+2\equiv 0$; d'où $4n^2+8\equiv 0$; d'où $9\equiv 0$
- ou $n^2+2\equiv 1$; d'où $4n^2+4\equiv 0$; d'où $5\equiv 0$

Une vérification facile montre que seuls 3 et 5 conviennent.

Cas 2 : $b=4n-2$

$(2n-1)^2 \equiv 2n-1$ et $(2n)^2 \equiv 2n$.

Si $2n<b$, c'est-à-dire $n>1$, deux entiers consécutifs (non nuls) sont des carrés, ce qui est impossible.

On vérifie que 2 convient.

Cas 3 : $b=4n$ avec n non multiple de 4

$(n+2)^2 \equiv n^2+4$ et $n^2 \equiv n^2$.

Comme 0 et 4 sont les seuls carrés dont la différence est 4, on a

* ou $n^2+4 \equiv 0$ et n divise 4
* ou $n^2+4 \equiv 1$ et n divise 3
* ou $n^2+4 \equiv 4$ mais $n^2 \equiv 0$ a été exclu

On vérifie que 4, 8 et 12 conviennent.

Cas 4 : $b=16n$

$(4n+1)^2 \equiv 8n+1$ et $(4n+3)^2 \equiv 8n+9$.

Comme 1 et 9 sont les seuls carrés dont la différence est 8, on a :

$$8n+9>16n \quad \text{d'où} \quad n=1 \ .$$

On vérifie que 16 convient.

Autres solutions : ANTETOMASOR (Bourg-la-Reine) et QUENTON (Madrid).

Exercice n° 5

Calculer $S_n = \Sigma \frac{1}{pq}$, les entiers p et q vérifiant

$$1 \leqslant p < q \leqslant n \quad , \quad p+q>n \quad , \quad \mathrm{PGCD}(p,q)=1$$

Solution

Le résultat $\left(S=\frac{1}{2}\right)$ a été démontré de deux façons différentes.

Solution 1 (CUCULIERE, Paris et LEGRAND, Biarritz)

Le résultat découle immédiatement de deux propriétés des suites de Farey.

La $n^{\text{ième}}$ suite de Farey, notée F_n , est la suite croissante des rationnels compris entre 0 et 1 dont le dénominateur, sous forme irréductible, est inférieur ou égal à n .

Prop. 1 : Deux fractions irréductibles a/b et c/d sont consécutives si et seulement si $b \leqslant n$, $d \leqslant n$, $b+d>n$ et $bc-ad=1$.

Prop. 2 : Pour tout couple (b,d) d'entiers inférieurs ou égaux à n, premiers entre eux, vérifiant $b+d>n$, il existe deux fractions consécutives et deux seulement de dénominateurs respectifs b et d.

Le double de la somme proposée est donc la somme des longueurs des intervalles, c'est-à-dire 1.

Solution 2 (COQUET, Valenciennes ; GUTMACHER, Paris ; LUCAZEAU, Nantes ; VIDAL, Sauvian et VIDIANI, Annecy)

$$S_{n+1}-S_n = \sum_{\substack{p<q=n+1\\(p,q)=1}} \frac{1}{pq} - \sum_{\substack{p<q\\p+q=n+1\\(p,q)=1}} \frac{1}{pq}$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{\substack{p<n+1\\(p,n+1)=1}} \frac{1}{p} - \sum_{\substack{p<\frac{n+1}{2}\\(p,n+1)=1}} \frac{1}{p(n+1-p)}$$

$$\frac{1}{p(n+1-p)} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{n+1-p}\right) \text{ montre } \quad S_{n+1}=S_n$$