7

LES PROBLEMES DE L'A.P.M.E.P.

La rubrique comprend deux parties.

La première (Problèmes) se consacre à des énoncés inédits ; la deuxième propose des exercices déjà posés (en particulier au CAPES et aux diverses olympiades) ou publiés qui, par leur caractère astucieux ou insolite, incitent à la recherche de solutions.

Les propositions d'énoncés et de solutions doivent être adressées dactylographiées à :

Charles AUQUE
Université de Clermont II
Département de Mathématiques Pures
B.P. 45
63170 AUBIERE

Problèmes

ENONCES

Enoncé n° 84 (NOTARI, Athis-Mons)

En utilisant une fois et une seule les chiffres de 1 à 9, écrire trois nombres de trois chiffres, tels que le second soit le double du premier et le troisième le triple du premier.

Enoncé n° 85 (FULGENCE, Dijon)

Trouver toutes les suites finies d'entiers naturels consécutifs dont la somme soit égale au produit du plus petit par le plus grand.

SOLUTIONS

Enoncé n° 71 (GAGNAIRE, Bron)

Quelle est la plus petite puissance de *six* dont l'écriture en base *dix* commence par un *neuf* ?

Solution de l'auteur :

Réponse : c'est 6^{176}, soit

90078 276385 246202 645102 918820 475217 309622 015212 833705 033780 614505 275352 569662 789031 588822 572244 111398 877227 429324 097608 129063 079175 520256

dont l'écriture comporte cent trente sept chiffres !

Commentaires

1. A première vue, l'énoncé paraît inoffensif, voire dépourvu d'intérêt. Un papier et un crayon semblent suffire pour en venir à bout... et puis... (essayez, vous verrez !).
2. On pense alors à la calculatrice de poche. Voici ce que donne la Rockwell 24 RD II (capacité : 8 chiffres) : la capacité est dépassée dès le calcul de 6^{11}, puis la machine accepte d'effacer le signal d'erreur et de continuer les calculs après pression de la touche $\boxed{\text{CE/C}}$. Mais, au lieu d'opérer ultérieurement sur

   $$6^{11} = 362\,797\,056, \text{ elle utilise } 3{,}627\,970\,5$$

   qui comporte les mêmes chiffres *sauf le dernier*. La présence de la virgule ramène à l'intervalle [1;10[, ce qui permet la poursuite de la recherche jusqu'à 6^{20}. Un nouveau dépassement de capacité a lieu pour 6^{21}. La procédure déjà décrite permet alors de continuer.
3. Chaque dépassement de capacité provoque la perte du chiffre le plus à droite, donc, à partir de 6^{11}, tous les résultats sont faux. L'erreur intéresse d'abord les chiffres les plus à droite qui, remarquons-le, n'ont jamais un rang supérieur à 8 à partir de la gauche. Dans quelle mesure le premier chiffre à gauche n'est-il pas endommagé ? Cette question est importante puisque, sur les 137 chiffres du résultat on est certain que la machine de poche n'en donnera pas 8 : en donnera-t-elle au moins un ?
4. Néanmoins, la poursuite de la recherche avec ce procédé rudimentaire donne :

   $$6^{176} \simeq 90078018.....$$

5. La suite des chiffres de gauche des puissances de 6 commence ainsi :

exposant	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
chiffre de gauche	1	6	3	2	1	7	4	2	1	1

De plus, $6^9 = 10\,077\,696 \simeq 10^7$.

Si 6^9 était égal à 10^7, alors la suite des chiffres de gauche des puissances de 6 serait périodique, avec la période :

$$1,6,3,2,1,7,4,2,1$$

qui ne contient ni 5, ni 8, ni 9.

La faible différence relative entre 6^9 et 10^7 explique que les chiffres 5, 8 et 9 n'arrivent que "tardivement" dans cette suite. En fait, c'est 9 qui arrive le dernier.

Je donne ci-après la suite des 177 chiffres de gauche des puissances de 6, de 6^0 à 6^{176}.

Cette suite est découpée en tranches de 9 termes consécutifs pour mieux montrer l'évolution. Celle-ci montre une "stabilité" assez remarquable. Cete suite a été établie au moyen de la machine de poche citée plus haut. La conformité des cinq premiers chiffres à gauche du résultat donné par cette machine avec ceux de 6^{176} garantit l'exactitude de la suite donnée ci-contre.
L'observation des colonnes du tableau formé par les tranches de neuf chiffres fait naître des questions nouvelles telles que :

1	6	3	2	1	7	4	2	1
1	6	3	2	1	7	4	2	1
1	6	3	2	1	7	4	2	1
1	6	3	2	1	7	4	2	1
1	6	3	2	1	8	4	2	1
1	6	3	2	1	8	4	2	1
1	6	3	2	1	8	4	2	1
1	6	3	2	1	8	4	2	1
1	6	3	2	1	8	4	2	1
1	6	3	2	1	8	5	3	1
1	6	3	2	1	8	5	3	1
1	6	3	2	1	8	5	3	1
1	6	3	2	1	8	5	3	1
1	6	3	2	1	8	5	3	1
1	6	4	2	1	8	5	3	1
1	6	4	2	1	8	5	3	1
1	6	4	2	1	8	5	3	1
1	6	4	2	1	8	5	3	1
1	6	4	2	1	8	5	3	1
1	6	4	2	1	9			

- pourquoi la stabilité est-elle meilleure dans certaines colonnes que dans d'autres ?
- à quel rang le chiffre des colonnes n^os 1,2,4,5,9 changera-t-il pour la première fois ?
- la 6^e colonne (tiens ! la 6^e !) paraît la moins stable de toutes ; conserve-t-elle cette propriété au-delà, ou bien le rôle de "colonne la moins stable" est-il tenu successivement et indifféremment par toute autre (et, peut-être, avec une certaine périodicité ?) ?
- etc.

6. A titre de *contrôle*, au lieu de calculer 6^{176} en multipliant 6 cent septante cinq fois par lui-même, j'ai profité de ce que $176 = 9 \times 19 + 5$

   donc $$6^{176} = (6^9)^{19} \times 6^5$$

   c'est-à-dire $$6^{176} = 10\,077\,696^{19} \times 6^5$$

   La proximité de 6^9 et 10^7 minimise la nuisance des dépassements de capacité et la machine donne alors

   $$6^{176} \simeq 90078210.....$$

   avec, cette fois-ci, six chiffres exacts, ce qui fait toujours un chiffre de gagné.

7. La *réponse* donnée au début, avec cent trente sept chiffres, a été donnée par un ordinateur WANG. Afin de confirmer qu'il s'agissait bien de la *plus petite* puissance de *six* commençant par 9, je lui ai demandé 6^{176-9}, dont voici les premiers chiffres : 8938.... Ces calculs sur ordinateur furent effectués *après* la recherche au moyen de la machine de poche ci-dessus décrite.

8. La *réponse* donnée mérite-t-elle le nom de *solution* ? C'est pour répondre à cette question que j'ai pris la décision de soumettre ce problème à l'A.P.M.E.P.

   Il est remarquable qu'une branche de l'arithmétique permet de répondre à coup sûr à la question :

   > "Quel est le chiffre de *droite* de l'écriture, dans telle base, du résultat de telle opération ?"

   C'est la théorie des congruences.

   Il est non moins remarquable (mais sans doute moins remarqué) que cette même arithmétique ne permet pas de répondre aussi facilement à la question :

   > "Quel est le chiffre de *gauche* de l'écriture, dans telle base, du résultat de telle opération ?"

   L'origine de cette difficulté n'est pas sans relation avec celle que présente l'enseignement du mécanisme de la retenue à l'école élémentaire, les instituteurs ne me démentiront pas.

Autres solutions :

AYRAUD (Toulouse), BAILLEUL (Tours), CARREGA (Lyon), CHONE (Thiers), CHRETIEN (Paris), COLLIGNON (Narbonne), CUCULIERE (Paris), DUMONT (Paris), FRAISSE (Lezignan Corbières), LEMAIRE (Douai), NOE (Marseille), PONASSE (Lyon), QUENTON (Madrid), SARROUY (Haïti), TISSIER (Montfermeil), TIXIER (Clemont de l'Oise), WEINACHTER (Réunion), et un correspondant dont j'ai égaré le nom.

Ce problème a intéressé de nombreux lecteurs. Certains utilisent les logarithmes, d'autres des calculatrices programmables en indiquant le programme. Nombreux sont ceux qui cherchent d'autres valeurs de l'exposant. J'indique ici quelques résultats : on a les nombres de 9 en 9 jusqu'à 293, puis un saut à 478, le saut suivant est à 771 ; le plus grand exposant indiqué est 10 115.

OLYMPIADES

Exercice n° 9

Dans un état, le système des lignes aériennes est construit de telle manière qu'une ville quelconque n'est reliée par des lignes aériennes qu'à trois villes au plus, et de telle façon qu'on puisse aller d'une ville à une autre en n'opérant qu'un changement au plus.

Quel est le nombre maximal de villes que contient cet état ?

Solution

Exercice n° 7

Enoncé : Les polynomes à coefficients entiers (relatifs) qui prennent des valeurs irrationnelles pour toutes les valeurs irrationnelles de la variable sont les polynomes du premier degré.

Solution :

Soit P (x) élément de Z [x], de degré n, de coefficient dominant a_n (qu'on suppose positif).

Soit p un nombre premier ; l'équation $P(x) = P(0) + p$ a une racine dans **R**.

Supposons cette racine rationnelle, a/b sous forme irréductible.

Par un raisonnement classique, a divise p et b divise a_n.

Le cas $a = \pm 1$ est exclu si $P(0) + p$ est supérieur au maximum de $P(x)$ sur $[-1, +1]$.

Quand x tend vers l'infini, $P(x)$ est équivalent à $a_n x^n$, donc il existe A tel que $|x| > A \Rightarrow |P(x)| > \frac{a_n |x|^n}{2}$. Pour $p > a_n A$, on a :

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \left|\frac{p}{b}\right| \geqslant \left|\frac{p}{a_n}\right| > A \quad \text{donc} \quad \left|P\left(\frac{a}{b}\right)\right| > \frac{a_n p^n}{2|b|^n} \geqslant \frac{p^n}{2a_n^{n-1}}$$

Si n est supérieur ou égal à 2, $P(0) + p > \frac{p^n}{2a_n^{n-1}}$ n'est vérifié que pour un nombre fini de nombres premiers.

Il existe donc p tel que l'équation $P(0) + p = P(x)$ a une racine réelle non rationnelle.

Autre solution : VIDIANI (Annecy).