9
LES PROBLÈMES DE L'A.P.M.E.P.

La rubrique comprend deux parties.

La première (Problèmes) se consacre à des énoncés inédits ; la deuxième propose des exercices déjà posés (en particulier au CAPES et aux diverses olympiades) ou publiés qui, par leur caractère astucieux ou insolite, incitent à la recherche de solutions.

Les propositions d'énoncés et de solutions doivent être adressées dactylographiées à :

Charles AUQUE
Université de Clermont II
Département de Mathématiques Pures
B.P. 45 — 63170 AUBIÈRE

Problèmes

ÉNONCÉS

Enoncé n° 86 (ROUX, Le Puy)

Déterminer toutes les applications f de E_3 dans E_3 (espace vectoriel euclidien de dimension 3) telles que pour tous vecteurs u et v

$$f(u \wedge v) = f(u) \wedge f(v)$$

Enoncé n° 87 (ROUX, Le Puy)

Trouver les solutions dans $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ de l'équation $x^y - y^x = x + y$.

N.B. Je n'ai reçu que 2 solutions au problème n° 82, fausses toutes les deux. J'invite donc les lecteurs à en reprendre l'étude.

SOLUTIONS

Enoncé n° 80 **(CABY, Paris)**

Soient (u_n) une suite strictement positive, décroissante, de limite 0 et $U = \sum_{1}^{\infty} u_n$ (U = $+\infty$ si la série diverge). Existe-t-il pour tout a, $0 < a < U$, une partie A de N telle que $a = \sum_{n \in A} u_n$?

N.B. Le texte de l'énoncé était volontairement vague. Certains se sont contentés d'exhiber une suite (par exemple $\left(\frac{1}{10^n}\right)$) qui donne une réponse négative (les nombres obtenus n'ont, dans leur écriture décimale, que des 0 et des 1). Il était essentiel de remarquer que, dans le cas d'une série divergente, la réponse est positive. Certains vont plus loin et trouvent la bonne condition sur la série.

Solution (LAUGIER, Korba)

La réponse à la question posée est affirmative si et seulement si la suite (u_n) vérifie la condition : pour tout n, $u_n \leqslant \sum_{n+1}^{\infty} u_k$.

Avant de procéder à la démonstration, remarquons que la condition est évidemment satisfaite lorsque $U = +\infty$. La suite $\left(\frac{1}{2^n}\right)$ convient et on retrouve alors un résultat bien connu : tout nombre réel compris entre 0 et 1 admet un développement dyadique.

La condition est nécessaire :

En effet, s'il existe n_0 tel que $u_{n_0} > \sum_{n_0+1}^{\infty} u_k$, soit a compris entre ces deux nombres ; $a < u_{n_0}$ et (u_n) décroissante entraînent

$$A \subset \{n \in \mathbf{N}, n > n_0\},$$

ce qui est contradictoire avec $a > \sum_{n_0+1}^{\infty} u_k$.

La condition est suffisante :

En effet, soit $0 < a < U$. Supposons que a ne soit pas de la forme $\sum_{k \in A} u_k$ avec A fini. Montrons qu'il existe A infini tel que $a = \sum_{k \in A} u_k$.

Soit m_1 le plus petit entier tel que $u_{m_1} < a$ et n_1 le plus grand entier tel que $\sum_{m_1}^{n_1} u_k < a$ (remarquons que n_1 existe : si $m_1 = 1$, ceci est dû au fait que $a<U$; si $m_1>1$, on a $u_{m_1-1} \leqslant \sum_{m_1}^{\infty} u_k$ et $a \leqslant u_{m_1-1}$ d'après le choix de m_1) . On a donc

$$0 < a - \sum_{m_1}^{n_1} u_k < u_{n_1+1} .$$

On définit ensuite m_2 et n_2 de la manière suivante : m_2 est le plus petit entier tel que $u_{m_2} < a - \sum_{m_1}^{n_1} u_k$ et n_2 le plus grand tel que

$$\sum_{m_2}^{n_2} u_k < a - \sum_{m_1}^{n_1} u_k .$$

Par récurrence sur q , on construit donc deux suites (m_q) et (n_q) d'entiers naturels vérifiant

$$m_q \leqslant n_q < m_{q+1} - 1 \quad \text{et} \quad 0 < a - \sum_{n \in A_q} u_n < u_{n_q+1}$$

où l'on a posé $A_q = [m_1, n_1] \cup \ldots\ldots \cup [m_q, n_q]$.

Si A est la réunion des A_q , on a $a = \sum_{n \in A} u_n$ (car $\lim u_n = 0$) .

N.D.L.R. : La démonstration reproduite doit être légèrement retouchée : n_q peut ne pas exister ; le segment $[m_q, n_q]$ est alors $[m_q, +\infty[$ et l'opération est terminée.

Autres solutions : ANTETOMASO, BAYARRI (Rivesaltes), COLLIGNON (Poitiers), CUCULIERE (Paris), FRAISSE (Lézignan), GAONAC'H (Le Pouliguen), JOBERT (Lyon), LAZET (Bordeaux), LEGRAND (Biarritz), LEMAIRE (Douai), LI (Rabat), PETIT (Brest) et l'auteur.

Enoncé n° 81 (HIRIART-URRUTY, Clermont-Ferrand)

Soit F un sous-ensemble dénombrable de L $(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$. On note Fx l'ensemble des $f(x)$ pour $f \in F$.

$g(x) \in Fx$ pour tout $x \in \mathbf{R}^n$ implique-t-il que $g \in F$ $(g \in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m))$?

N.B. La résolution du problème repose essentiellement sur le fait que $\mathbf{R}^n$ n'est pas réunion dénombrable d'hyperplans. Certains le démontrent par récurrence, d'autres invoquent le théorème de Baire. Je publie ci-dessous une démonstration originale. L'auteur ayant omis de porter son nom sur sa solution, celle-ci reste anonyme.

Solution

Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de $\mathbf{R}^n$. A chaque $\lambda \in \mathbf{R}$, on associe le vecteur $x_\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i e_i$. Des vecteurs x_λ associés de cette façon à n réels λ non nuls et deux à deux distincts forment une base de $\mathbf{R}^n$; en effet, leur déterminant sur la base des e_i est un déterminant de Vandermonde.

Soit $g \in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ tel que dans l'énoncé ; pour montrer que $g \in F$, on va prouver qu'il existe $\varphi \in F$ donnant la même image que g de n vecteurs x_λ formant une base de $\mathbf{R}^n$.

Pour $\lambda \in \mathbf{R}$, on note $F_\lambda = \{f \in F / f(x_\lambda) = g(x_\lambda)\}$. Par hypothèse, cet ensemble est non vide et $\mathcal{F} = \bigcup_{\lambda \in \mathbf{R}} F_\lambda$ est une partie de F, donc dénombrable.

A chaque $\varphi \in \mathcal{F}$, on associe $\Lambda_\varphi = \{\lambda \in \mathbf{R} / \varphi \in F_\lambda\}$. Puisqu'aucun des F_λ n'est vide, il est clair que

$$\mathbf{R} = \bigcup_{\varphi \in \mathcal{F}} \Lambda_\varphi .$$

Comme $\mathbf{R}$ n'est pas dénombrable et que $\mathcal{F}$ l'est, l'un au moins des Λ_φ n'est pas dénombrable ; il contient assurément n valeurs λ non nulles deux à deux distinctes pour lesquelles on a $g(x_\lambda) = \varphi(x_\lambda)$. Par suite $g = \varphi \in F$.

Autres solutions : ANTETOMASO, BAUVAL (Montrouge), FRAISSE (Lézignan), GAONAC'H (Le Pouliguen), LAUGIER (Korba), LEMAIRE (Douai), MANTIN (Cachan) et l'auteur.

Olympiades

ÉNONCÉS

Enoncé n° 10

Démontrer que l'inégalité

$$(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)\ldots(a_1 - a_n) + (a_2 - a_1)(a_2 - a_3)\ldots(a_2 - a_n) + \ldots + (a_n - a_1)\ldots(a_n - a_{n-1}) \geqslant 0$$

est toujours vraie pour $n = 3$ et $n = 5$, mais peut être fausse pour les autres valeurs de n.

(n est un entier strictement plus grand que 2 et les a_k sont des réels).

SOLUTIONS

Antetomaso a envoyé une solution plus simple de ***l'exercice n° 7*** (polynomes à coefficients entiers prenant des valeurs irrationnelles pour toutes les valeurs irrationnelles de la variable) :

Pour tout entier $m>0$, $P(x)=a_0+\frac{1}{m}$ a une solution rationnelle (car $P(x)$ est continu et tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$).

Si x s'écrit $\frac{p}{q}$ irréductible et si m est premier, la relation démontre que m divise q. En posant $q=mr$ et en reportant dans la relation, on voit que si $n\geqslant 2$, m divise a_n. Le nombre fini de diviseurs de a_n implique donc $n=1$.

Les solutions des exercices proposés depuis la création de la rubrique seront publiés dans le prochain Bulletin.