7

LES PROBLÈMES DE L'A.P.M.E.P.

La rubrique comprend deux parties.

La première (Problèmes) se consacre à des énoncés inédits; la deuxième propose des exercices déjà posés (en particulier au CAPES et aux diverses olympiades) ou publiés qui, par leur caractère astucieux ou insolite, incitent à la recherche de solutions.

Les propositions d'énoncés et de solutions doivent être adressées dactylographiées à :

Charque AUQUE
Université de Clermont II
Département de Mathématiques Pures
B.P. 45
63170 AUBIÈRE

Problèmes

ÉNONCÉS

Enoncé n° 88 (EHRHART, Strasbourg)

Un triangle porte comme seuls nœuds d'un quadrillage ses sommets et quatre points intérieurs. Démontrer que ces derniers sont alignés.

Enoncé n° 89 (NICOLAS, Limoges)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = u_0u_1 \ldots u_n + 1$.

Démontrer qu'il existe un nombre réel c tel que $u_n = c^{2^n} + 0,5 + a_n$ avec $\lim a_n = 0$.

SOLUTIONS

Enoncé n° 78 (CHONE, Thiers)

Dans un espace affine euclidien de dimension n, on considère $n+1$ demi-droites ditinctes issues du même point, telles que les C_{n+1}^2 angles qu'elles déterminent deux à deux aient même mesure. Déterminer cette mesure commune.

Solution :

Les solutions reçues (CUCULIÈRE (Paris), FRAISSE (Lézignan), GUÉRIN (Montluçon), HÉRON (Blois), LEFORT (Colmar), LEMAIRE (Douai), ODOUX (Grenoble), PERET (Abidjan), VIDIANI (Annecy) et l'auteur) n'abordent pas toujours le problème de l'existence de ces $n+1$ demi-droites.

Certaines rappellent opportunément le lien avec le problème d'agrégation 1979 ou la théorie des simplexes.

Je propose le calcul élémentaire suivant.

On désigne par u_i les vecteurs directeurs unitaires, et par v_i les projections de ces vecteurs sur l'hyperplan H orthogonal à u_{n+1}.

Donc $u_i = (\cos(a_{n+1}))\, u_{n+1} + v_i$ et $v_i^2 = \sin^2 a_{n+1}$ pour $i = 1,\ldots,n$.

$u_i.u_j = \cos^2 a_{n+1} + v_i.v_j$ montre que les n vecteurs v_i font le même angle deux à deux dans H, déterminé par la formule :

$$\cos a_{n+1} = \cos^2 a_{n+1} + \sin^2 a_{n+1} \cos a_n \quad \text{qui s'écrit}$$

$$(1 + \cos a_{n+1}) \cos a_n = \cos a_{n+1}.$$

Cette formule donne par une récurrence immédiate, à partir de $n=1$, la valeur $\cos a_{n+1} = -1/n$ et un procédé de construction effective, par récurrence sur la dimension, de $n+1$ demi-droites satisfaisant les conditions de l'énoncé.

Enoncé n° 86 (ROUX, Le Puy)

Déterminer toutes les applications f de E_3 dans E_3 (espace vectoriel euclidien de dimension 3) telles que, pour tous les vecteurs u et v, $f(u \wedge v) = f(u) \wedge f(v)$.

Solution (HÉRON, Orsay)

Les applications de E_3 dans E_3 qui vérifient :

(1) $$f(u \wedge v) = f(u) \wedge f(v) \qquad \forall\, u, v \in E_3$$

sont l'application nulle et les transformations orthogonales de déterminant $+1$ (rotations de E_3).

On notera $(.,.)$ le produit scalaire sur E_3 et $\|.\|$ la norme associée. Soit f une solution de l'identité (1).

1°) *On a* $f(-w) = -f(w)$ *pour tout* $w \in E_3$ *et notamment* $f(0) = 0$.

L'antisymétrie du produit vectoriel entraîne :

$$f(-u \wedge v) = f(v \wedge u) = f(v) \wedge f(u) = -f(u \wedge v).$$

Or, tout $w \in E_3$ peut s'écrire $u \wedge v$, par exemple en choisissant u unitaire orthogonal à w et $v = w \wedge u$. D'où le résultat.

2°) f *est injective ou identiquement nulle.*

Il s'ensuit de (1) que :

$$f((u \wedge v) \wedge w) = (f(u) \wedge f(v)) \wedge f(w) \qquad \forall u, v, w \in E_3$$

ou encore après développement :

(2) $\quad f(v(u, w) - u(v, w)) = f(v)(f(u), f(w)) - f(u)(f(v), f(w)) \qquad \forall u, v, w \in E_3.$

Si $f(u) = 0$ pour un certain $u \neq 0$, on a donc aussi $f(x) = 0$ pour tout vecteur qui se met sous la forme $x = v(u, w) - u(v, w)$. Pour $x \in E_3$ quelconque, choisissons v orthogonal à u de façon que x appartienne au plan $\{u, v\}$. Alors si on pose $w = \dfrac{(x, v)}{\|u\|^2} u - \dfrac{(x, u)}{\|v\|^2} v$, il est clair que $x = (u \wedge v) \wedge w$. Par suite $f(x) = 0$ et donc $f \equiv 0$.

3°) *Si* f *est injective, elle est linéaire orthogonale.*

Soit $u \in E_3 - \{0\}$, $\lambda \in \mathbf{R}^* = \mathbf{R} - \{0\}$. Par hypothèse $f(u)$ et $f(\lambda u)$ ne sont pas nuls et :

$$f(u) \wedge f(\lambda u) = f(\lambda u \wedge u) = f(0) = 0.$$

Il existe donc $a(\lambda, u) \in \mathbf{R}^*$ tel que $f(\lambda u) = a(\lambda, u)\, f(u)$. De plus, si u et v sont indépendants et si $\lambda \in \mathbf{R}^*$ la relation :

$$f(\lambda u \wedge v) = f(\lambda u) \wedge f(v) = f(u) \wedge f(\lambda v) \neq 0,$$

montre que $a(\lambda, u) = a(\lambda, v)$. Il en résulte aisément que $a(\lambda, u)$ est indépendant de u.

Compte tenu du 1°) et du 2°), nous avons jusqu'ici prouvé que :

$$\forall u \in E_3, \quad \forall \lambda \in \mathbf{R}, \qquad f(\lambda u) = a(\lambda)\, f(u)$$

(3) où a est une fonction impaire nulle seulement en $\lambda = 0$ qui vérifie $a(1) = 1$, et la relation immédiate

$$a(\lambda \mu) = a(\lambda)\, a(\mu) \qquad \forall \lambda, \mu \in \mathbf{R}.$$

De la relation (2), on va déduire que $a(\lambda^2 + \mu^2) = a(\lambda^2) + a(\mu^2)$ et l'on pourra conclure que $a(\lambda) \equiv \lambda$.

Etant donné u et w quelconques, on choisit $v \neq 0$ orthogonal à w. La relation (2) se réduit à $f(v(u, w)) = f(v)(f(u), f(w))$, c'est-à-dire :

(4) $\qquad a((u, w)) = (f(u), f(w)) \qquad \forall u, w \in E_3.$

Ceci montre déjà que des vecteurs orthogonaux sont transformés par f en deux vecteurs orthogonaux, et qu'un vecteur unitaire est transformé en un vecteur unitaire puisque $a(0) = 0$ et $a(1) = 1$.

Considérons maintenant deux vecteurs u et v indépendants. A tout couple (λ,μ) de réels, on peut associer $w \in E_3$ tel que $\lambda = -(v,w)$ et $\mu = (u,w)$. Les relations (2) et (4), et l'imparité de a entraînent alors :

$$(5) \qquad f(\lambda u + \mu v) = a(\lambda)\, f(u) + a(\mu)\, f(v) \qquad \forall \lambda, \mu \in \mathbf{R}\,.$$

Ceci vaut en particulier pour u et v unitaires, orthogonaux. En utilisant (4), on obtient

$$a((\lambda u + \mu v, \lambda u + \mu v)) = |a(\lambda)\, f(u) + a(\mu)\, f(v)|^2\,.$$

Comme $f(u)$ et $f(v)$ sont unitaires, orthogonaux, ceci s'écrit encore

$$(6) \qquad a(\lambda^2 + \mu^2) = a(\lambda)^2 + a(\mu)^2 = a(\lambda^2) + a(\mu^2)\,.$$

Il découle de (3) que a est strictement positive sur $\mathbf{R}_+^*$ et (6) montre alors que a est croissante. Par ailleurs, on vérifie aisément que $a(m) = m$ pour tout $m \in \mathbf{N}$, puis que $a(r) = r$ pour tout $r \in \mathbf{Q}$. Comme a est croissante, on a nécessairement $a(\lambda) = \lambda$ pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$. Ceci prouve tout à la fois que f est linéaire et (cf. (4)) conserve le produit scalaire, i.e. est une transformation orthogonale.

4°) *Les transformations orthogonales, solution de (1), sont celles du groupe SO(3).*

Les propriétés du produit mixte montrent que pour tout $u, v, w \in E_3$

$$\begin{aligned}(f(u) \wedge f(v), f(w)) &= (f(u), f(v), f(w))\\ &= (\det f)(u,v,w)\\ &= (\det f)(u \wedge v, w)\end{aligned}$$

d'où ${}^t f(f(u) \wedge f(v)) = (\det f)\, u \wedge v$; enfin, puisque ${}^t f = f^{-1}$, l'identité (1) est satisfaite si et seulement si $\det f = 1$.

Autres solutions : MANAC'H (Lorient), LEMAIRE (Lille), PICHEREAU (Saint Yriex) et TISSIER (Montfermeil).

Olympiades

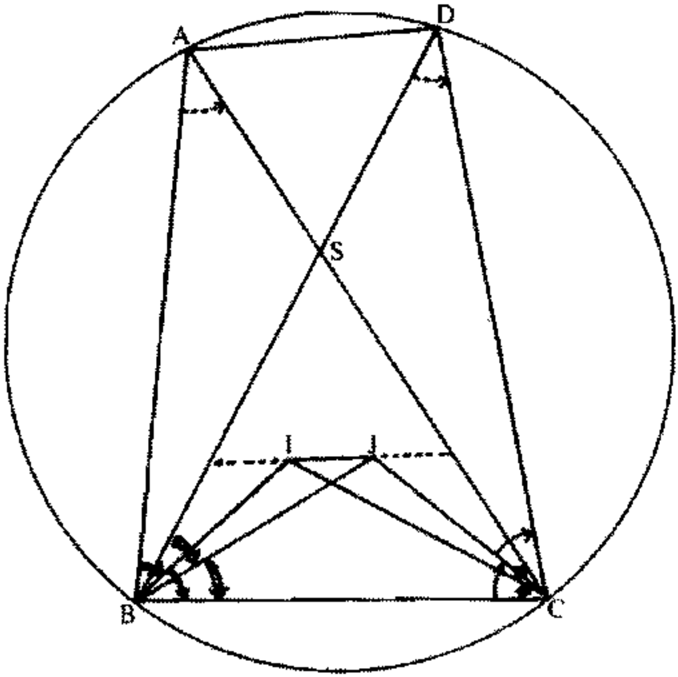
Exercice n° 1 (CAPES)

Les centres des cercles inscrits des quatre triangles dont les sommets sont pris parmi quatre points cocycliques forment un rectangle.

Solution :

Je publie ci-dessous la solution de Lemaire (Lille) et la très belle figure de Viricel (Nancy) qui montre les rectangles formés par les 16 centres des cercles tritangents aux trois triangles.

Autres solutions : AYRAUD (Toulouse), BLEAS et TAILLE (Nantes), CHRETIEN (Paris), DELPLA (Montpellier), VIDAL (Montpellier) et VIDIANI (Annecy).



En dénommant, dans un ordre convenable, quatre points cocycliques, A, B, C, D, on peut supposer que A et C sont situés de part et d'autre de la droite (BD). Soit S le point d'intersection des droites (AC) et (BD).

Notons I (respectivement J, K et L) le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC (respectivement BCD, CDA et DAB).

$$\widehat{(IB,IC)} = \widehat{(IB,BC)} + \widehat{(BC,IC)} = \frac{1}{2}\widehat{(\vec{BA},\vec{BC})} + \frac{1}{2}\widehat{(\vec{CB},\vec{CA})} = \frac{1}{2}\widehat{(\vec{AB},\vec{CA})} = -\frac{1}{2}\widehat{(\vec{BA},\vec{CA})}.$$

Pareillement,

$$\widehat{(JB,JC)} = \widehat{(JB,BC)} + \widehat{(BC,JC)} = \frac{1}{2}\widehat{(\vec{BD},\vec{BC})} + \frac{1}{2}\widehat{(\vec{CB},\vec{CD})} = \frac{1}{2}\widehat{(\vec{DB},\vec{CD})} = -\frac{1}{2}\widehat{(\vec{BD},\vec{CD})}$$

Puisque A,B,C,D sont cocycliques, $\widehat{(\vec{BA},\vec{CA})} = \widehat{(\vec{BD},\vec{CD})}$.

Il vient $\widehat{(IB,IC)} = \widehat{(JB,JC)}$, ce qui établit que *I, J, B et C sont aussi cocycliques.*

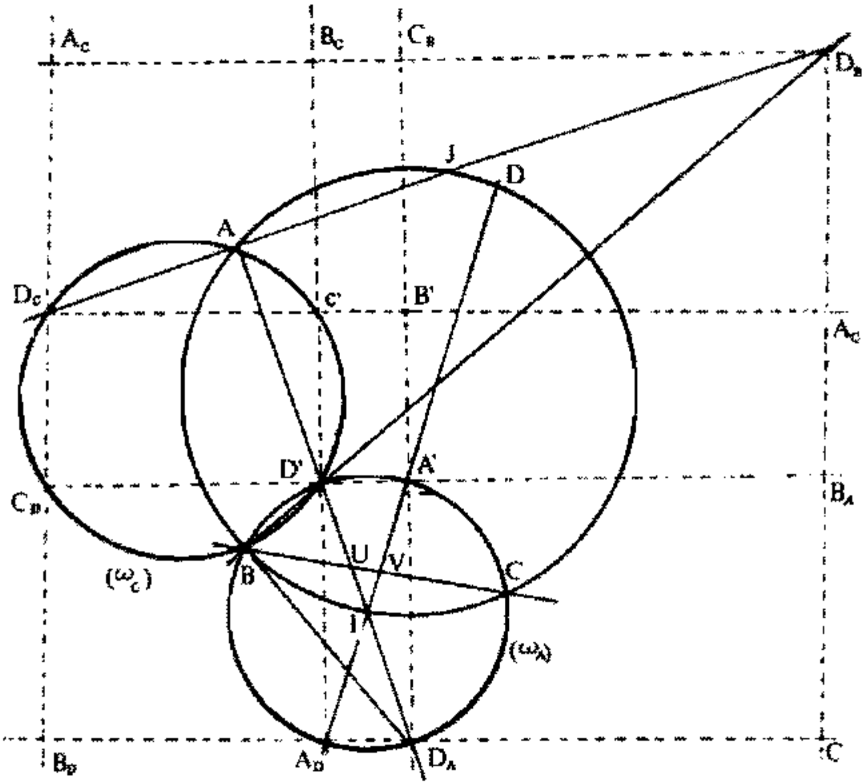
Donc $\widehat{(CI,IJ)} = \widehat{(CB,BJ)}$. Mais, d'autre part, $\widehat{(CS,CI)} = \widehat{(CI,CB)}$. Par addition membre à membre de ces deux égalités, on obtient

$\widehat{(CS,IJ)} = \widehat{(CI,BJ)}$. On montrerait de même que $\widehat{(BS,IJ)} = \widehat{(BJ,IC)}$. Il s'en déduit que la droite (IJ) coupe (BD) et (AC) en des points équidistants de S.

Pour des raisons analogues, (IK) coupe (BD) et (AC) en des points équidistants de S.

(IJ) et (IK), orthogonales (ou parallèles) aux bissectrices de l'angle $(\widehat{BD, AC})$, sont orthogonales. Il en sera évidemment de même de (IJ) relativement à (JK), et de (JK) relativement à (KL).

Autrement dit, *I, J, K, L sont sommets d'un rectangle.*



Exercice n° 9

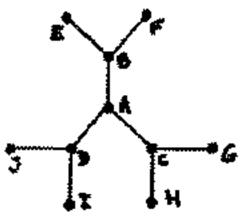
Dans un état, le système des lignes aériennes est construit de telle manière qu'une ville quelconque n'est reliée par des lignes aériennes qu'à trois villes au plus, et de telle façon qu'on puisse aller d'une ville à une autre en n'opérant qu'un changement au plus.

Quel est le nombre maximal de villes que contient cet état ?

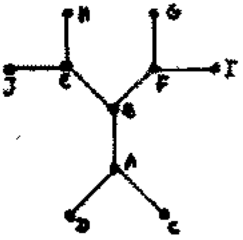
Solution : LEMAIRE (Lille), la figure étant de GAONAC'H (Le Pouliguen)

Une ville donnée, A, ne peut être reliée directement au plus qu'à trois autres villes B, C, D et, par chacune d'elles, à deux autres villes. Par suite, le nombre maximal n de villes de l'état est tel que $n \leqslant 10$.

Le problème est de voir si la configuration ① des neuf villes relativement à la dixième, A, se retrouve relativement à chacune des autres villes. Par exemple, pour B, on peut proposer le schéma ② :

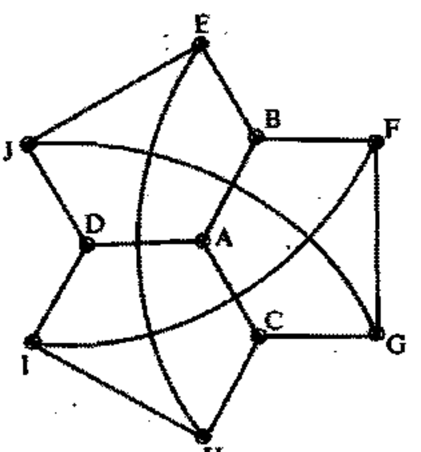


①



②

La figure ③ montre que *10 villes peuvent être effectivement reliées selon des conditions de l'énoncé.*



③