10
LES PROBLÈMES DE L'A.P.M.E.P.

La rubrique comprend deux parties.

La première (Problèmes) se consacre à des énoncés inédits; la deuxième propose des exercices déjà posés (en particulier au CAPES et aux diverses olympiades) ou publiés qui, par leur caractère astucieux ou insolite, incitent à la recherche de solutions.

Les propositions d'énoncés et de solutions doivent être adressées dactylographiées à

Charles AUQUE
Université de Clermont II
Département de Mathématiques Pures
B.P. 45
63170 AUBIÈRE

Problèmes

ÉNONCÉS

Énoncé n° 90 (VIDIANI, Dijon)

Trouver la limite de la suite définie par $u_1 > 0$, $u_2 > 0$ et la relation de récurrence

$$u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^2 + u_n^2}{u_{n+1} + u_n}$$

Énoncé n° 91 (AUQUE, Clermont-Ferrand)

Le critère utilisé par CORDES (Longué) dans son programme BASIC pour résoudre le n° 84 amène la question suivante :
Que peut-on dire d'un nombre de 9 chiffres (dans le système décimal) tel que la somme des chiffres soit 45 et le produit des chiffres soit 362880 ?

SOLUTIONS

Les noms de VIDIANI (Dijon) pour le problème n° 86 et l'exercice n° 10 et de CUCULIÈRE pour le problème n° 86 ont été omis dans le dernier numéro.

Énoncé n° 84 (NOTARI, Athis-Mons)

En utilisant une fois et une seule les chiffres de 1 à 9, écrire trois nombres de trois chiffres, tels que le second soit le double du premier et le troisième le triple du premier.

Solution

Ce problème, comme beaucoup de problèmes élémentaires, n'est pas inédit. Il a, en particulier, été posé en 1978 dans "*Le Petit Archimède*".

Comme pour tout problème fini, on peut considérer tous les nombres (ici de 100 à 999) et regarder ceux qui conviennent (ici 900 vérifications). C'est ce que l'on a tendance à faire sur ordinateur. Ce dernier donne les 4 solutions 192, 273, 327, 219 en un temps qui dépend du programme et de sa vitesse (55 secondes à une heure trente dans les réponses).

Il paraît souhaitable de réduire le nombre d'essais par des critères simples. En désignant par x le nombre qui, avec son double et son triple, reconstitue les 9 chiffres, l'énoncé impose $3x \leqslant 987$ donc $123 \leqslant x \leqslant 329$. Cette remarque ramène à 207 le nombre de vérifications.

L'application de la "preuve par 9" donne

$$x + 2x + 3x = 1+2+3+4+5+6+7+8+9 \pmod 9$$

soit $6x = 45 \pmod 9$, ce qui montre que x est divisible par 3, d'où 69 vérifications à effectuer.

On peut attaquer les vérifications ou chercher d'autres remarques (par exemple x ne se termine pas par 5, ou plus subtilement x ne se termine pas par 1 car $x, 2x, 3x$ se termineraient par 1,2,3, or x commence par l'un de ces chiffres). Il appartient donc au chercheur, dans les problèmes de ce genre, de doser son effort, et, bien entendu, aucune solution type ne peut être donnée.

Autres solutions: AYRAUD (Toulouse), BAILLEUL (Tours), CAMOUS (Marseille), CARREGA (Lyon), CHARPY (Lans en Vercors), une classe de terminale de Narbonne, le Club de math du Puy, CUCULIÈRE (Paris), CORDES (Longué), FRAISSE (Lezignan les Corbières), MANAC'H (Lorient), ROUX (Le Puy), SARROUY (Haiti) et l'auteur.

Énoncé n° 85 (FULGENCE, Dijon)

Trouver toutes les suites finies d'entiers naturels consécutifs dont la somme soit égale au produit du plus petit par le plus grand.

Solution : HENRIOT (Dôle)

Soit k le plus petit entier et n le plus grand entier d'une suite solution ; il vient :

$$nk = \frac{n(n+1) - k(k-1)}{2}$$

soit : $$2nk = n^2 + n - k^2 + k$$

ou : $$2nk = (n+k)(n+k+1)$$

ou : $$(n-k)^2 + (n-k+1)^2 = (2k-1)^2$$

Cette dernière relation apparente ce problème à la recherche des triangles rectangles pseudo-isocèles : voir l'article de Maurice GLAYMANN dans le Bulletin n° 310.

On a encore :

$$(2n-(2k-1))^2 - 2(2k-1)^2 = -1$$

En posant :

$$v = 2k-1 \quad \text{et} \quad u = 2n-(2k-1)$$

il vient :

$$u^2 - 2v^2 = -1$$

u et v apparaissent alors comme étant des solutions d'une équation de Pell : ce sont les coefficients du développement de $(1+\sqrt{2})^{2p+1}$

$$u_p = \frac{1}{2}\left((1+\sqrt{2})^p + (1-\sqrt{2})^p\right) \qquad v_p = \frac{\sqrt{2}}{4}\left((1+\sqrt{2})^p - (1-\sqrt{2})^p\right)$$

car $$(1+\sqrt{2})^p = u_p + v_p\sqrt{2} \qquad (1-\sqrt{2})^p = u_p - v_p\sqrt{2}$$

et $$(u_p + v_p\sqrt{2})(u_p - v_p\sqrt{2}) = u_p^2 - 2v_p^2 = (-1)^p$$

Quelques relations utiles :

— des récurrences : $u_p = v_p + v_{p-1}$; $v_p = v_{p-1} + u_{p-1}$

$u_p = 2u_{p-1} + u_{p-2}$; $v_p = 2v_{p-1} + v_p$

— des autres : $v_{2p+1} = v_p^2 + v_{p+1}^2 = u_p v_{p+1} + u_{p+1} v_p$

$v_{2p} = 2u_p v_p$

$u_{2p} = u_p^2 + 2v_p^2$

$u_p v_{p+1} = 1/2(v_{2p+1} - (-1)^p)$

$v_p u_{p+1} = 1/2(v_{2p+1} + (-1)^p)$

en particulier : $1/2(v_{2p+1} + 1) = u_p v_{p+1}$ pour p impair

$= u_{p+1} v_p$ pour p pair

Application à la résolution du problème :

$$y_{2p+1} = 2k-1$$

soit : $k = 1/2(v_{2p+1}+1) = u_p v_{p+1}$ (si p pair)

$= u_{p+1} v_p$ (si p impair)

$$2n-(2k-1) = u_{2p+1}$$

soit : $2n = u_{2p+1}+(2k-1) = u_{2p+1}+v_{2p+1}$

$= v_{2p+2} = 2u_{p+1}v_{p+1}$

finalement : $n = u_{p+1}v_{p+1}$

D'où le tableau suivant :

p	u_p	v_p	k	n
0	1	0	1	1
1	1	1	3	6
2	3	2	15	35
3	7	5	85	204
4	17	12	493	1189
5	41	29	2871	6930
6	99	70	16731	40391
..	...	...	.....	.....
..	...	....	.....	.....

Autres solutions : AIDI (Salambo), AYRAUD (Toulouse), BAILLEUL (Tours), BRUSQUE (Nîmes), CARREGA (Lyon), CHRETIEN (Villemomble), CROS (Tahiti), CUCULIERE (Paris), DEBART (Caen), FRAISSE (Lezignan-Corbières), MANAC'H (Lorient), NOTARI (Athis-Mons), PERROT (Paris), QUENTON (Madrid), ROUX (Le Puy), SPIRA (Mirepoix), THUILIERE (Rabat), VIDIANI (Dijon) et l'auteur.

Commentaire : L'énoncé, attractif, se ramenait rapidement à une équation de Pell-Fermat. Le responsable de la rubrique a apprécié l'aisance des correspondants dans la résolution de cette équation, que ce soit par les puissances de $1+\sqrt{2}$, les matrices 2×2 ou les fractions continues.

Olympiades

ÉNONCÉS

Exercice n° 11

Démontrer que, quel que soit l'entier naturel n , on peut trouver un nombre formé des chiffres 1 et 2 (dans le système décimal) et divisible par 2^n .

Exercice n° 12 (classique ainsi que ses variantes au CAPES)

Démontrer que si a,b,c sont les longueurs des côtés d'un triangle on a : $(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$.

SOLUTIONS

Exercice n° 4

Dans un carré de 7×7 carreaux, on choisit n centres de carreaux. Parmi ceux-ci on ne peut pas trouver 4 points qui sont sommets d'un rectangle aux côtés parallèles à ceux du carré. Quel est le n maximum vérifiant cette propriété ?

Solution : LEMAIRE (Lille)

Considérons plus généralement un carré de $k \times k$ carreaux $(k \geqslant 2)$ et choisissons un certain nombre de centres de tels carreaux où nous placerons un pion. Notons $n(k)$ le nombre maximum de pions qu'il est possible de placer en respectant la condition (C) de l'énoncé : parmi eux, il n'existe pas 4 pions qui soient aux sommets d'un rectangle à côtés parallèles à ceux du carré.

La division euclidienne de $n(k)$ par k donne

$$n(k) = kq + r \qquad \text{avec} \qquad 0 \leqslant r < k.$$

Parmi les lignes (respectivement les colonnes) de carreaux, il existe au moins une ligne (respectivement une colonne) contenant au plus q pions.

Supprimons du carré une telle ligne et une telle colonne, de façon à obtenir, en "recollant" au besoin les blocs restants, un carré $(k-1)\times(k-1)$.

Dans cette opération, sont ôtés au plus $2q$ pions et il est évident que les pions restants satisfont à la condition (C).

Donc $\quad n(k-1) \geqslant n(k) - 2q \qquad (1), \qquad$ avec $q = \left[\dfrac{n(k)}{k}\right]$.

Nous allons chercher dans quels cas il est possible de remplacer cette minoration de $n(k-1)$ par une minoration un peu meilleure, à savoir par

$$n(k-1) \geqslant n(k) - 2q + 1 \qquad (2) .$$

Ceci est d'abord le cas si le carré $k \times k$ possède une ligne ou une colonne contenant moins de q pions. On peut alors, en supprimant une telle ligne (respectivement une telle colonne) et une colonne (respectivement une ligne) contenant au plus q pions, retirer au plus $2q-1$ pions.

Si maintenant, il n'existe pas de ligne ni de colonne contenant moins de q pions, cela signifie que, parmi les k lignes, il en existe $k-r$ contenant q pions, et r en contenant $q+1$. Conclusion analogue concernant les colonnes.

Si alors $q > r$ **(2 bis)**, il existe au moins une ligne et une colonne de q pions ayant un pion en commun. La suppression d'une telle ligne et d'une telle colonne enlève donc $2q-1$ pions et l'inégalité (2) est vérifiée.

Montrons que ces considérations permettent de déterminer $n(k)$ de proche en proche, en faisant croître la valeur de k de 2 jusqu'à 7.

Connaissant $n(k-1)$, nous déterminerons *le plus grand entier* vérifiant (1) ou (2) et (2 bis).

Pour $k=2$, il est immédiat que $n(2)<4$ et que toute disposition de 3 pions satisfait à la condition (C). Donc $n(2) = 3$.

Ensuite, $n(3)$ doit vérifier l'inéquation $3 \geqslant X - 2\left[\frac{X}{3}\right]$ et, si le reste de la division de $n(3)$ par 3 est inférieur au quotient, $3 \geqslant X - 2\left[\frac{X}{3}\right] + 1$.

On voit que $X=6$ est le plus grand entier satisfaisant à ces conditions. Ainsi $n(3) \leqslant 6$.

La figure montre qu'il existe un carré 3×3 comportant 6 pions satisfaisant à la condition (C). Donc, $n(3)=6$.

10 est tel que $10 - 2\left[\frac{10}{4}\right] = 6$ (et $10 = 4q + r$ avec $q = 2 = r$), d'où $n(4) \leqslant 10$.

Mais la disposition de 10 pions sur un carré 4×4 comporte deux lignes ou deux colonnes contenant au moins 3 pions. Ce qui infirme la condition (C).

En fait, $n(4)=9$, ainsi que le prouve la figure.

13 est tel que $13 - 2\left[\frac{13}{5}\right] = 9$ (et $13 = 5q + r$ avec $q = 2 < 3 = r$), d'où $n(5) \leqslant 13$.

Ici encore l'égalité est impossible.

D'après la figure, $n(5)=12$.

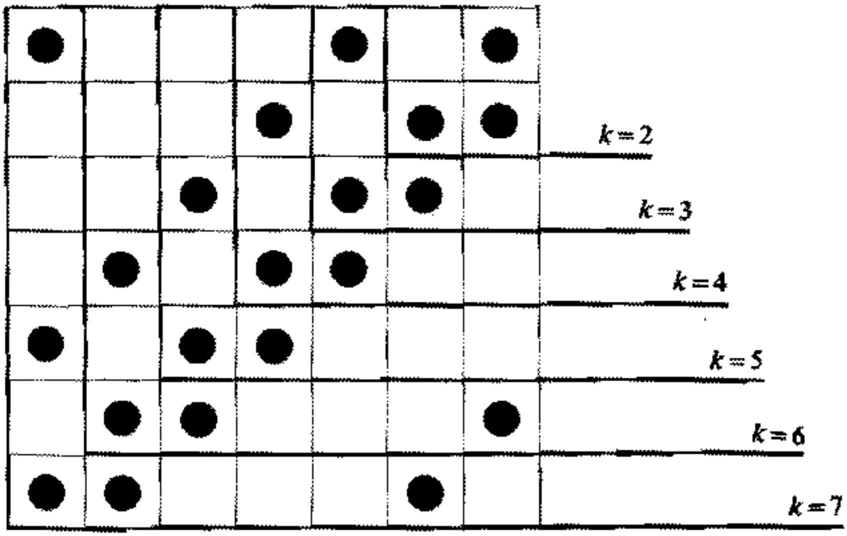
16 est tel que $16 - 2\left[\frac{16}{6}\right] = 12$ (et $16 = 6q + r$ avec $q = 2 < 4 = r$).

Effectivement, $n(6)=16$.

21 est tel que $21 - 2\left[\frac{21}{7}\right] + 1 = 16$ (ici $21 = 7q + r$ avec $q = 3 > 0 = r$).

Un exemple de disposition, sur un carré 7×7, de 21 pions qui satisfont à la condition (C) est donné sur la figure.

21 est le nombre maximum de pions sur un tel carré.



Commentaire : Peu de solutions pour ce problème combinatoire ! Quelques élèves de Première, lors d'un Rallye Mathématique d'Auvergne, avaient donné une disposition à 21 pions, mais aucun n'avait démontré qu'elle était maximale. Le problème peut se résoudre d'une façon totalement différente de celle publiée. La discussion porte sur le nombre maximum de pions dans une ligne. Le début est facile : si la première ligne comporte 7 pions, les autres ne peuvent en avoir plus d'un, une disposition à 13 pions est réalisée en couvrant une diagonale. La discussion se complique pour 6,5,4 mais conduit au caractère maximum de 21.