

# 9

## LES PROBLÈMES DE L'A.P.M.E.P.

*Pour répondre à la demande de nombreux lecteurs, cette rubrique comprend désormais deux parties.*

*La première ("PROBLÈMES") poursuit la publication d'énoncés inédits avec leurs solutions.*

*La deuxième ("OLYMPIADES") est consacrée aux exercices déjà posés (en particulier aux diverses Olympiades), ou publiés qui, par leur caractère insolite, incitent à la recherche de solutions.*

*En raison de l'importance de la rubrique "Olympiades" due à la contribution de notre collègue C. Deschamps, ce numéro ne comporte pas de nouveaux énoncés de "problèmes".*

*Les énoncés et les solutions doivent être adressés dactylographiés à :*

Charles AUQUE  
Université de Clermont II  
Département de Mathématiques Pures  
B.P. 45  
63170 AUBIÈRE

## Problèmes

## SOLUTIONS

*Énoncé n° 82 (BELGY, Clermont-Ferrand)*

Les chiffres de l'écriture, dans une base de numération  $b$ , d'un nombre premier  $p$  sont (en partant du chiffre des unités) :  $a_0, a_1, \dots$   
Démontrer que le polynôme  $\sum a_n X^n$  est irréductible sur  $\mathbb{Z}$ .

**Solution**

Soit  $A(X)$  le polynôme,  $d$  son degré (que l'on suppose  $\geq 2$ ), et  $A(X) = B(X)C(X)$  une décomposition sur  $\mathbb{Z}$ .

On a  $p = B(b)C(b)$ . Par échange éventuel de  $B$  et  $C$ , et par changement éventuel de signe on peut supposer  $B(b) = 1$ .

Le cas où  $B$  est une constante est donc écarté et  $B(X) = c \prod_{i=1}^r (X - z_i)$  où les  $z_i$  sont des racines de  $A(X)$ .

Nous allons démontrer que  $B(b) = 1$  est impossible par l'étude des racines de  $A(X)$ .

- Supposons d'abord  $b \geq 3$

Si  $z$  est une racine de  $A(X)$  telle que  $|z| \geq 2$ , on a :

$$\left| z + \frac{a_{d-1}}{a_d} \right| \leq \left| a_d z + a_{d-1} \right| = \left| \frac{a_{d-2}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^{d-1}} \right| \leq (b-1) \left( \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{d-1}} \right) < b-1$$

Il en résulte immédiatement que  $|z - b| > 1$ .

Mais les racines qui vérifient  $|z| < 2$  vérifient aussi  $|z - b| > 1$ .  
D'où :

$$1 = B(b) = c \prod_{i=1}^r (b - z_i) = |c| \prod_{i=1}^r |b - z_i| > |c| \geq 1$$

qui démontre l'impossibilité.

- Le cas  $b = 2$  est plus difficile :

Soit  $z$  une racine de  $A(X)$  telle que  $\operatorname{Re}(z) \geq 1$ .

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z) \leq \operatorname{Re}(a_d z) &\leq \operatorname{Re}(a_d z + a_{d-1} + \frac{a_{d-2}}{z}) \leq \left| a_d z + a_{d-1} + \frac{a_{d-2}}{z} \right| \\ &= \left| \frac{a_{d-3}}{z^2} + \dots + \frac{a_0}{z^{d-1}} \right| \leq \frac{1}{|z|^2} + \dots + \frac{1}{|z|^{d-1}} < \frac{1}{|z|(|z| - 1)} \end{aligned}$$

$$\text{D'où} \quad \operatorname{Re}(z) < \frac{1}{|z|(|z| - 1)} \leq \frac{1}{\operatorname{Re}(z)(\operatorname{Re}(z) - 1)}$$

Le polynôme  $T^3 - T^2 - 1$  a sa plus grande racine strictement inférieure à  $3/2$ , donc  $\operatorname{Re}(z) < 3/2$ .

Les racines réelles de  $B(X)$  sont négatives et les racines complexes non réelles vérifient  $\operatorname{Re}(z) < 3/2$ . Il résulte par substitution dans  $B(X) = c \prod (X - r_j) \prod (X^2 - 2\operatorname{Re}(z_i)X + |z_i|^2)$  que  $B(X + 3/2)$  a tous ses facteurs à coefficients positifs et donc est un polynôme à coefficients positifs.

$B(x + 3/2) > B(-x + 3/2)$  appliqué à  $x = 1/2$  donne  $B(2) > B(1)$  qui est un entier positif non nul, donc  $B(2) \geq 2$ .

**Autres solutions :** Le problème, déjà traité avec  $b = 10$ , a été résolu indépendamment de cette rubrique dans le Canadian Journal of Mathematics en 1981. J'ai reçu quelques solutions fausses, deux solutions partielles, LEMAIRE (Lille) et ROUX (Le Puy) et la solution de l'auteur.

**Énoncé n° 87 (ROUX, Le Puy)**

Trouver les solutions dans  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  de l'équation  $x^y - y^x = x + y$ .

**Solution (LEMAIRE, Lille)**

1°) Il ne peut exister de solution de la forme  $(\alpha; \alpha)$  où  $\alpha \in \mathbb{N}$ .

2°) La fonction  $f : x \mapsto f(x) = \frac{\text{Log } x}{x}$  décroît sur  $[e, +\infty[$ , de  $\frac{1}{e}$  à 0.

Conséquence : si  $3 \leq x < y$ , alors  $\frac{\text{Log } x}{x} > \frac{\text{Log } y}{y}$ , d'où  $x^y > y^x$  ①.

Remarquons tout de suite, puisque pareillement,  $3 \leq y < x \Rightarrow x^y - y^x < 0$ , que l'équation  $x^y - y^x = x + y$  n'a pas de solution  $(x; y)$  telle que  $3 \leq y < x$ .

3°) Nous allons montrer qu'elle n'a pas non plus de solution  $(x; y)$  où  $3 \leq x < y$ .

Soit  $x$  fixé tel que  $x \geq 3$ . Considérons la fonction

$$g : y \mapsto g(y) = x^y - y^x - x - y,$$

que nous dérivons :  $g'(y) = (\text{Log } x)x^y - x y^{x-1} - 1$ ; d'où, pour  $y > x$ ,

$$g'(y) > (\text{Log } x)y^x - x y^{x-1} - 1, \text{ d'après } \textcircled{1}.$$

$$g'(y) > y^{x-1} \left[ (\text{Log } x)y - x - \frac{1}{y^{x-1}} \right] > y^{x-1} \left[ (\text{Log } x)x - x - \frac{1}{x^2} \right]$$

car  $y > x \geq 3$ ; mais  $(\text{Log } x - 1)x - \frac{1}{x^2} > x - \frac{1}{x^2} > 0$  pour  $x \geq 3$ .

Par conséquent, pour  $y > x$  (où  $x \geq 3$ ),  $g'(y) > 0$  et  $g$  est fonction croissante de  $y$ . Il suffira de prouver que si  $y = x + 1$ , alors  $g(y) > 0$ , pour pouvoir affirmer que  $x^y - y^x - x - y > 0$  pour tout couple d'entiers  $(x; y)$  tel que  $3 \leq x < y$ .

Considérons la fonction  $h : x \mapsto h(x) = g(x + 1) = x^{x+1} - (x + 1)^x - 2x - 1$ ,

$$h(x) = x^x \left[ x - \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x \right] - 2x - 1.$$

Pour les valeurs  $x \geq 3$  qui nous intéressent, la fonction

$$\varphi : x \mapsto \varphi(x) = \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x$$

est positive, continûment dérivable, de dérivée logarithmique

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \text{Log} \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} = u(x).$$

$\varphi'(x)$  a le même signe que  $u(x)$ , dont la dérivée  $u'(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2}$  est négative.

Ainsi, sur  $[3; +\infty[$ ,  $u$  décroît de  $\left(\text{Log} \frac{4}{3}\right) - \frac{1}{4}$  à 0, donc  $\varphi$  croît de  $\left(\frac{4}{3}\right)^3$  à  $e$ .

Conséquence : pour  $x \geq 3$ ,  $h(x) > x^x(x-e) - 2x - 1$ , d'où

$$h(x) > x^x \left[ x - e - \frac{2}{x^{x-1}} - \frac{1}{x^x} \right] > x^x \left[ x - e - \frac{2}{9} - \frac{1}{27} \right] > x^x(x - 2,978) > 0.$$

4°) Il ne reste plus qu'à *rechercher les solutions éventuelles*  $(x; y)$  où l'un des naturels  $x$  ou  $y$  est plus petit que 3.

- Pour  $x=0$ , l'équation devient :  $-1=y$ ; or  $-1 \in \mathbb{N}$ .
- Pour  $y=0$ , l'équation devient :  $1=x$ , d'où la solution  $(1;0)$ .
- Pour  $x=1$ , l'équation devient :  $1-y=1+y$ , d'où  $y=0$ ; on retrouve la même solution.
- Pour  $y=1$ , l'équation devient :  $x-1=x+1$ . Impossible.
- Pour  $x=2$ , elle s'écrit :  $2^y = y^2 + y + 2$ .  
3 et 4 rendent :  $2^y < y^2 + y + 2$ ;  
 $y=5$  donne :  $2^y = 32 = y^2 + y + 2$ , donc le couple  $(2;5)$  est solution.

Montrons que si  $y \geq 6$ ,  $2^y > y^2 + y + 2$  : posant  $\delta(y) = 2^y - y^2 - y - 2$ , il s'agit de prouver que  $y \geq 6 \implies \delta(y) > 0$ .

Comme

$$\delta'(y) = (\text{Log } 2) 2^y - 2y - 1 > 2^{y-1} - 2y - 1$$

$$\text{et } \delta''(y) = (\text{Log } 2)^2 2^y - 2 > 2^{y-2} - 2$$

on voit que  $y \geq 6 \implies \delta''(y) > 0$ , donc  $\delta'$  est croissante sur  $[6; +\infty[$ , et comme  $\delta'(6) > 2^5 - 12 - 1 > 0$ ,  $\delta$  est croissante, et positive pour  $y \geq 6$  car  $\delta(6) = 2^6 - 6^2 - 6 - 2 = 20 > 0$ .

On peut dire que l'équation n'a pas de solution du type  $(2; y)$  où  $y \geq 6$ .

- Pour  $y=2$ , il vient  $2^x = x^2 - x - 2$ .

Posons  $\gamma(x) = 2^x - x^2 + x + 2$ .

$$\gamma'(x) = (\text{Log } 2) 2^x - 2x + 1 > 2^{x-1} - 2x + 1,$$

$$\gamma''(x) = (\text{Log } 2)^2 2^x - 2 > 2^{x-2} - 2.$$

Pour  $x \geq 3$ ,  $\gamma''(x) > 0$ , donc  $\gamma'$  est croissante, et positive puisque  $\gamma'(3) > 2^2 - 2^2 + 1 > 0$ .

On en déduit que  $\gamma$  est croissante et positive car

$$\gamma(3) = 2^3 - 3^2 + 3 + 2 = 4 > 0 .$$

Ainsi, l'équation n'a pas de solution du type  $(x;2)$  où  $x \geq 3$ .

En résumé, l'équation étudiée n'admet que  $(1;0)$  et  $(2;5)$  comme couples  $(x;y)$  solutions.

**Autres solutions :** AMON (Angoulême), AYRAUD (Toulouse),  
BEAUME (Pierrelatte), CUCULIERE (Paris), LAUGIER (Korba),  
MANAC'H (Lorient), NOTARI (Athis-Mons), TISSIER (Montfermeil)  
et l'auteur.