Bulletin de l'APMEP n°348 - 1985

les problèmes de l'a.p.m.e.p.

Enoncé n° 94 (A. ADLER, Paris)

Soit n un entier. Quel est le nombre des suites de n entiers dont chaque terme est égal au nombre de ceux qui le précèdent et qui lui sont strictement inférieurs ? (exemples : 012145 ou 002342).

Enoncé n° 95 (ENGEL, R.F.A.)

Soient a, b, c trois entiers premiers entre eux deux à deux. Quel est le plus grand entier qui ne peut pas s'écrire sous la forme $bcx + cay + abz$ où x, y, z sont trois entiers ? (Cet énoncé provient des olympiades internationales de mathématiques de juillet 1983).

Enoncé n° 96 (D. ROUX, Le Puy)

Combien existe-t-il d'entiers n pour lesquels n^3 est égal à une somme de plusieurs carrés d'entiers consécutifs ?

N.B. : Dans ces énoncés le mot "entiers" désigne les entiers naturels, éléments de **N**.

Remarque 1 : Certains lecteurs trouveront peut-être qu'il est beaucoup question de nombres entiers dans ces énoncés, qu'ils se rassurent, les amateurs de géométrie seront servis dans la prochaine rubrique.

Remarque 2 : Il est encore temps d'envoyer des solutions pour les énoncés n° 63, 65, 90, 93.

SOLUTIONS

Exercice n° 10.

Démontrer que l'inégalité

$$(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ \ldots\ (a_1-a_n) + (a_2-a_1)(a_2-a_3)\ \ldots\ (a_2-a_n) + \ldots + (a_n-a_{n-1}) \geqslant 0$$

est toujours vraie pour $n = 3$ et $n = 5$, mais peut être fausse pour les autres valeurs de n. (n est un entier strictement plus grand que 2 et les a_k des réels).

Cet exercice a été posé à des élèves de première le 20 mai 1981 à l'occasion du deuxième Rallye Mathématique d'Auvergne. Voici une solution rencontrée :

Désignons par $E_n(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ l'expression proposée. L'expression ne change pas de valeur si on échange deux lettres, et plus généralement reste invariante dans toute permutation des lettres $a_1, a_2, \ldots, a_n$. On peut donc supposer $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots\ldots \geqslant a_n$.

1° cas : $n = 3$. $E_3(a,b,c) = (a-b)(a-c) + (b-a)(b-c) + (c-a)(c-b) =$
$= (a-b)(a-c-b+c) + (c-a)(c-b) = (a-b)^2 + (c-a)(c-b) \geqslant 0$
car $(c-a)(c-b) \geqslant 0$ puisque $a \geqslant b \geqslant c$.

2° cas : $n = 5$. $E_5(a,b,c,d,e) = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$ où :

$A_1 = (a-b)(a-c)(a-d)(a-e)$

$A_2 = (b-a)(b-c)(b-d)(b-e)$

$A_3 = (c-a)(c-b)(c-d)(c-e)$

$A_4 = (d-a)(d-b)(d-c)(d-e)$

$A_5 = (e-a)(e-b)(e-c)(e-d)$

$A_3 \geqslant 0$ car $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d \geqslant e$.

$$A_1 + A_2 = (a-b)\,[(a-c)(a-d)(a-e) - (b-c)(b-d)(b-e)] \geqslant 0$$

$$\text{car} \left| \begin{array}{l} a-c \geqslant b-c \geqslant 0 \\ a-d \geqslant b-d \geqslant 0 \\ a-e \geqslant b-e \geqslant 0 \end{array} \right.$$

$$A_4 + A_5 = (d-e)\,[(a-e)(b-e)(c-e) - (a-d)(b-d)(c-d)] \geqslant 0$$

$$\text{car} \left| \begin{array}{l} a-e \geqslant a-d \geqslant 0 \\ b-e \geqslant b-d \geqslant 0 \\ c-e \geqslant c-d \geqslant 0 \end{array} \right.$$

donc $E_5(a,b,c,d,e) \geqslant 0$

3° cas : n pair, $n > 2$ $E_n(-1,0,0,\dots,0) = (-1)^{n-1} < 0$: l'inégalité n'est pas vérifiée.

4° cas : $n \geqslant 6$ $E_n(2,2,2,1,0,0,\dots,0) = -1 < 0$ si il y a au moins deux 0 (c'est-à-dire si $n \geqslant 6$).

Autre solution : J. LEMAIRE (Lille).

Exercice n° 12 (classique ainsi que ses variantes au CAPES)

Démontrer que si a,b,c sont les longueurs des côtés d'un triangle, on a : $(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$

Solution (R. CUCULIÈRE, Paris)

Les longueurs a,b,c vérifient $0 < a < b+c$, $0 < b < c+a$, $0 < c < a+b$.

On sait que $a+b \geqslant 2\sqrt{ab}$ (car $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0$). En conséquence : $(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 2\sqrt{ab}.2\sqrt{bc}.2\sqrt{ca} = 8abc$. Il reste donc à prouver que si $Q = \dfrac{8(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}{8\,abc}$ alors $Q \leqslant 1$. Posons $p = \dfrac{1}{2}(a+b+c)$ (demi-périmètre), il vient : $Q = \dfrac{8(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}$.
Utilisons la formule de Héron : $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$ ainsi que $S = pr$ et $abc = 4RS$ où r et R désignent respectivement les rayons des cercles inscrit et circonscrit au triangle. On en déduit :

$$Q = \frac{8\,S^2}{4pRS} = \frac{2\,S}{pR} = \frac{2pr}{pR} = \frac{2r}{R}$$

Or si I et O sont les centres des cercles inscrit et circonscrit, la relation d'EULER : $OI^2 = R(R-2r)$ prouve que $R \geqslant 2r$. Donc $Q \leqslant 1$ cqfd.

Autres solutions : J. LEMAIRE (Lille), MANAC'H (Lorient), et M. VIDIANI (Dijon) qui propose trois solutions et fait également remarquer qu'il y a égalité si et seulement si le triangle est équilatéral.

Enoncé n° 91 (AUQUE, Clermont-Ferrand).

Que peut-on dire d'un nombre de 9 chiffres (dans le système décimal) tel que la somme des chiffres soit 45 et le produit des chiffres soit 362880 ?

Solution

Première méthode : "à la main". Voici comment procède J. LEMAIRE de Lille : Puisque $45 = \sum_{i=1}^{9} i$ et que $362880 = 9! = \prod_{i=1}^{9} i$, les nombres dont l'écriture, dans le système décimal, se compose des neuf chiffres, de 1 à 9, sont solutions. Toute la question est de voir s'il en existe d'autres.

$362880 = 2^7 \times 3^4 \times 5 \times 7$. *L'écriture d'un nombre, de neuf chiffres, dont le produit des chiffres est 362880 doit donc comporter un 5 et un 7, et les sept autres chiffres ne peuvent avoir comme diviseurs premiers que 2 ou 3.*

Raisonnons à partir des facteurs divisibles par 3.

1) Si dans l'écriture d'un nombre solution, il existe deux 9, il reste à déterminer cinq chiffres, puissances de 2, de somme 15 et de produit 2^7.

15 peut se décomposer en :

$$8+4+1+1+1 \quad , \quad 8+2+2+2+1 \quad , \quad 4+4+4+2+1 \; ,$$

sommes dont les termes ont pour produits respectifs 2^5, 2^6, 2^7. On constate que satisfait aux conditions du problème tout nombre dont l'écriture décimale se compose des neuf chiffres 1,2,4,4,4,5,7,9,9.

2) S'il existe un seul 9 et deux 6, il reste à déterminer quatre chiffres, puissances de 2, de somme 12 et de produit 2^5.

$12 = 8+2+1+1 = 4+4+2+2$: sommes dont les termes ont pour produits 2^4 et 2^6. Ce qui ne convient pas.

3) S'il existe un 9, un 6 et un 3, les quatre chiffres restants ont maintenant pour somme 15 et produit 2^6.

La seule décomposition possible de 15 en somme de quatre puissances de 2 ($15 = 8+4+2+1$) conduit effectivement au produit 2^6. On reconnaît les solutions formées par les entiers dont l'écriture utilise les neuf chiffres 1,2,3,4,5,6,7,8,9.

4) S'il existe un 9 et deux 3, il reste à déterminer quatre chiffres de somme 18 et de produit 2^7.

Or les seules décompositions possibles,

$$18 = 8+8+1+1 \text{ et } 18 = 8+4+4+2,$$

donnent respectivement les produits 2^6 et 2^8 et ne fournissent donc pas de solution.

5) S'il existe quatre 6, les trois chiffres restant à déterminer ont pour somme $S = 9$ et produit $P = 2^3$.

$$9 = 4+4+1 \text{ , mais } 4 \times 4 \times 1 = 2^4 .$$

6) S'il existe trois 6 et un 3, on a $S = 12$ et $P = 2^4$. Or $12 = 8+2+2$ et $12 = 4+4+4$ correspondent aux produits 2^5 et 2^6.

7) S'il existe deux 6 et deux 3, il vient $S = 15$ et $P = 2^5$. Mais 15 ne peut être somme de trois puissances de 2.

8) S'il existe un 6 et trois 3, $S = 18$ et $P = 2^6$.

$$18 = 8+8+2 \text{ , mais } 8 \times 8 \times 2 = 2^7.$$

9) Enfin, s'il existe quatre 3, $S = 21$ et $P = 2^7$. Mais 21 ne peut être écrit comme somme de trois puissances de 2.

Finalement, *les nombres solutions sont ceux dont les neuf chiffres de l'écriture décimale sont, à l'ordre près, soit 1,2,3,4,5,6,7,8,9 soit 1,2,4,4,4,5,7,9,9.*

Deuxième méthode : à l'aide d'un ordinateur.

M. MANACH de Lorient a écrit pour le ZX 81 le programme BASIC ci-dessous. Ce programme fait former, dans l'ordre croissant toutes les combinaisons avec répétitions des 9 éléments de {1,2,3,4,5,6,7,8,9} (il y en a $C_{17}^{9} = 24310$), éliminer celles dont la somme n'est pas 45, puis celles dont le produit ne donne pas 362880, et fait imprimer les solutions : 1,2,3,4,5,6,7,8,9 et 1,2,4,4,4,5,7,9,9.

```
  5 LET C = 0
 10 FOR I = 1 TO 9
 20 FOR J = I TO 9
 30 FOR K = J TO 9
 40 FOR L = K TO 9
 50 FOR M = L TO 9
 60 FOR N = M TO 9
 70 FOR O = N TO 9
 80 FOR P = O TO 9
 90 FOR Q = P TO 9
100 LET S = I+J+K+L+M+N+O+P+Q
110 IF S < > 45 THEN GOTO 200
120 LET P = I*J*K*L*M*N*O*P*Q
130 IF P < > 362 880 THEN GOTO 200
140 PRINT "N="; I; J; K; L; M; N; O; P; Q
200 LET C = C+1
210 NEXT Q
220 NEXT P
230 NEXT O
240 NEXT N
250 NEXT M
260 NEXT L
270 NEXT K
280 NEXT J
290 NEXT I
300 PRINT "TERMINE"
310 PRINT "NB. ESSAIS="; C
320 STOP
```

Remarque 1 : Le compteur C permet de vérifier si le nombre d'essais a été 24 310.

Remarque 2 : Le temps de calcul sur le ZX 81 est de 20 minutes environ.

Compléments : Je me suis posé le problème un peu plus général suivant : *que peut-on dire de 9 entiers ayant même somme, et même produit que les entiers de 1 à 9 ?*

Soit : $\sum_{i=1}^{9} x_i = \frac{9 \times 10}{2} = 45$ et $\prod_{i=1}^{9} x_i = 9\,! = 362\,880$. J'ai également réalisé, en L.S.E., un programme comportant 9 boucles emboîtées ; pour éliminer les répétitions par permutations, j'ai imposé $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_9$, et fait varier x_1 de 1 à 5 ; x_2 de x_1 à ENT$((45 - x_1){:}9)$; x_3 de x_2 à ENT$((45 - x_1 - x_2){:}8)$ etc..., x_9 de x_8 à $45 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 - x_6 - x_7 - x_8$.

En cinquante minutes cela a donné 12 solutions :

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	6	6	6	7	10
1	2	4	4	4	5	7	9	9
1	3	3	3	4	6	7	8	10
1	3	3	4	4	4	7	9	10
1	3	3	4	4	5	6	7	12
2	2	2	3	4	6	7	9	10
2	2	2	3	5	6	6	7	12
2	2	3	3	3	5	7	8	12
2	2	3	3	4	5	6	6	14
2	3	3	3	3	4	5	8	14
2	3	3	3	4	4	4	7	15

Il résulte de ceci (en ôtant le 9) que le problème analogue dans le cas de 8 nombres n'admet que 4 solutions : la solution triviale $x_i = i$ et les 3 autres

3 autres	1	2	4	4	4	5	7	9
	1	3	3	4	4	4	7	10
	2	2	2	3	4	6	7	10

et que pour au plus 7 entiers le problème analogue n'admet plus qu'une solution.

Ce qui démontre le résultat suivant :

Si 7 entiers ont même somme et même produit que 1,2,3,4,5,6,7 alors ce sont ceux là (à l'ordre près).

COURRIER DE LECTEURS

Madame S. CHRÉTIEN de Villemomble propose pour la rubrique l'énoncé suivant : "*On considère un triangle ABC inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$. Quelle est l'enveloppe de la droite de Simson d'un point M qui décrit le cercle $\mathcal{C}$*".

Suit une impeccable démonstration analytique prouvant qu'il s'agit d'une H_3 : hypocycloïde à 3 points de rebroussements, et de la remarque suivante : ***Il est surprenant que partant d'un triangle quelconque, on aboutisse à une figure invariante par rotation d'angle*** $\frac{2\pi}{3}$. (En effet les 3 points de rebroussements sont sommets d'un triangle équilatéral).

Le problème est trop classique pour être posé dans la rubrique, il a fait l'objet de nombreuses publications, par exemple voir *Hypocycloïdes et épicycloïdes* de J. LEMAIRE (éditions ALBERT BLANCHARD) 1967 livre II, chapitre III, et généralisation au chapitre IV. Mais la remarque est profonde, ce n'est pas un cas isolé, on peut citer au moins trois autres exemples conduisant à la même constatation :

1) Lorsqu'on construit extérieurement au triangle ABC des triangles équilatéraux ABC', BCA', CAB', leurs centres sont les sommets d'un triangle équilatéral. Si on construit les triangles intérieurement cela donne de même un autre triangle équilatéral. Ce sont les deux "triangles de NAPOLÉON", la différence de leurs aires est celle du triangle ABC).

Référence : redécouvrons la géométrie de COXETER (DUNOD) 1971 ; Chap. 3.

2) Les 27 points d'intersections des trisectrices associées d'un triangle se répartissent aux sommets de 27 triangles équilatéraux. (Théorème de MORLEY).

Référence : Leçons sur les constructions géométriques de Henri LEBESGUE, (GAUTHIER-VILLARS) 1950, deuxième partie, chapitre IV.

3) Les 3 cercles ayant pour diamètre les segments déterminés sur chaque côté du triangle ABC par les bissectrices de l'angle opposé s'appellent cercles d'APPOLONIUS. Ils se coupent en deux points I et I' sous des angles de 120° et sont orthogonaux au cercle circonscrit au triangle. Par suite toute inversion de pôle I ou I' transforme A,B,C, en les sommets d'un triangle équilatéral.

Référence : La géométrie du triangle par T. LALESCO (Annales roumaines de Mathématiques) 1952 chapitre 6.

Bref dans tous ces exemples il surgit une symétrie ternaire, alors qu'a priori on ne l'attendait pas.

Monsieur PRUD'HOMME de Lille, dans sa lettre du 1er mai 1983 nous propose comme énoncé la conjecture suivante : "*$2^n - 2$ n'est jamais divisible par n^2*".

Empressons nous de lui répondre qu'il serait vain d'en chercher une démonstration, il y a des contre-exemples, rares et très recherchés lorsqu'ils sont pour n premier, en raison du théorème suivant dû à WIEFERICH (1909) sur le dernier théorème de FERMAT : Si p est un nombre premier impair tel que p^2 ne divise pas $2^p - 2$, $x^p + y^p = z^p$ n'a pas de solution entière avec $xyz \neq 0$.

En 1913 MEISSNER montra que $p = 1093$ vérifie : p^2 divise $2^p - 2$, puis en 1922 BEEGER trouva le suivant : $p = 3511$.

Les calculs faits par BRILLHART, TONASCIA et WEINBERGER (1971) montrent qu'il n'y a que ces deux nombres premiers vérifiant cette propriété parmi ceux qui sont inférieurs à 3×10^9.

Référence : 13 lectures on Fermat's Last theorem de RIBENBOIM (SPRINGER) 1979.