Baccalauréat C Groupe 1 [1] juin 1968

SÉRIE C

Exercice 1

Étudier les variations de la fonction f telle que

$$f(x) = \text{Log}\left(\text{e}^x + 2\text{e}^{-x}\right).$$

Le symbole Log désigne le logarithme népérien et e la base de ce système de logarithmes.

Tracer la représentation graphique, (Γ), de f ; démontrer que (Γ) possède un axe de symétrie.

Exercice 2

L'arc x étant évalué en radians, résoudre l'équation :

$$\sin\frac{x}{3} + 2\cos\frac{x}{3} + 1,5 = 0,$$

avec l'approximation permise par les tables. (Le candidat indiquera la nature de la table dont il aura fait usage.)

Exercice 3

Le plan est rapporté à un repère orthonormé dont les axes sont Ox, Oy.

Soit la droite $\Delta \quad (y = h)$, qui coupe Oy au point H.

Un cercle C tangent en O à Oy rencontre (Γ) en deux points, E et E$'$. Soit (ω) le cercle de diamètre EE$'$, de centre ω, dans le plan xOy.

A.

1. Trouver l'équation du cercle (ω) ; on désignera par À l'abscisse de ω.
2. La perpendiculaire en ω au plan xOy rencontre la sphère (Ω) de grand cercle (ω) en deux points, dont on demande le lieu géométrique :
   - **a.** quand λ varie seul ;
   - **b.** quand λ et h varient simultanément.

B.

1. Soit G et G$'$ les points du cercle (ω) situés sur le diamètre parallèle à Oy. Lorsque λ varie, démontrer que G et G$'$ décrivent une hyperbole, dont la position dépend de h, soit K$_h$.

   Trouver, quand h varie, le lieu des sommets et le lieu des foyers des hyperboles K$_h$; quelle propriété possède l'ensemble des hyperboles K$_h$?
2. On donne un point M$\left(x_0\ ;\ y_0\right)$ de K$_h$; trouver, en fonction de x_0 et y_0, le coefficient directeur de la tangente en M à K$_h$.

   Trouver le point T où cette tangente rencontre Oy ; démontrer que, si N est la projection orthogonale de M sur Oy,

   $$\overline{\text{HT}} \cdot \overline{\text{HN}} = -h^2$$

   Interpréter géométriquement ce résultat. Quelles sont les tangentes à K$_h$ menées par O ?

1. Le Groupe 1 comprend les pays suivants : Algérie, Iles Comores, Cameroun sud, Italie, Turquie. Côte française des Somalis, Égypte, Éthiopie, Syrie, Liban, Grèce, Tunisie, Espagne et Portugal.

C.

1. Où faut-il placer le point $P(\alpha ; \beta)$ dans le plan pour qu'il passe par ce point au moins une hyperbole K_h ? Discuter.
2. On place P de façon qu'il passe en ce point deux courbes K_h distinctes ; évaluer l'angle aigu θ sous lequel se coupent ces deux courbes ; démontrer que θ ne dépend que du rapport $\mu = \dfrac{\beta}{\alpha}$ et étudier les variations de θ avec μ ; quel est le plus grand angle sous lequel peuvent se couper deux courbes Kh_h ?

D.

Trouver les coordonnées des points communs aux deux courbes K_h et $K_{h'}$. Tracer sur la même figure les courbes K_1 (pour $h = 1$) et K_2 (pour $h' = 2$).
La première bissectrice $(y = x)$ rencontre respectivement K_1 et K_2 aux points S_1 et S_2 ; les arcs de K_1 et de K_2 passant respectivement par S_1 et S_2 se rencontrent au point Q ; évaluer l'aire limitée par le segment S_1S_2 et les arcs QS_1 et QS_2 de K_1 et K_2.
[On prendra pour nouveaux axes (OX,OY) les axes déduits des anciens $(\mathrm{O}x, \mathrm{O}y)$ par une rotation de $\dfrac{\pi}{4}$ autour du point O.