APMEP

Baccalauréat ES — Spécialité

Tapuscript : B. Colombel

dernière mise à jour : 3 février 2018

Code source, remarques, erreurs : maurice72 at ymail.com

N°	Lieu et date	Graphes	Graphes probabilistes	Matrices
1	Métropole 20 juin 2014		×	
2	Antilles — Guyane 19 juin 2014		×	
3	Asie 19 juin 2014	×	×	
4	Polynésie 13 juin 2014	×		
5	Centres Étrangers 12 juin 2014	×		
6	Amérique du Nord 30 mai 2014	×		
7	Liban 27 mai 2014	×		
8	Pondichéry 7 avril 2014		×	×

Session 2013

N°	Lieu et date	Graphes	Graphes probabilistes	Matrices
9	Nouvelle-Calédonie 7 mars 2014		×	
10	Amérique du Sud 21 novembre 2013	×	×	
11	Nouvelle-Calédonie 18 novembre 2013		×	
12	Métropole Réunion 13 septembre 2013	×	×	
13	Antilles Guyane 12 septembre 2013	×	×	
14	Polynésie 4 septembre 2013	×	×	
15	Métropole sujet dévoilé juin 2013		×	
16	Métropole 20 juin 2013	×	×	
17	Asie 19 juin 2013	×		
18	Antilles Guyane 19 juin 2013	×		
19	Centres Étrangers 2013	×		
20	Polynésie 7 juin 2013		×	×
21	Amérique du Nord 30 mai 2013		×	
22	Liban 28 mai 2013	×		×
23	Pondichery 15 avril 2013	×		×

1. Métropole 20 juin 2014

Alice participe à une compétition de tir à l'arc ; elle effectue plusieurs lancers de flèches.
Lorsqu'elle atteint la cible à un lancer, la probabilité qu'elle atteigne la cible au lancer suivant est égale à 0,9.
Lorsqu'elle a manqué la cible à un lancer, Alice se déconcentre et la probabilité qu'elle atteigne la cible au lancer suivant est égale à 0,4.
On suppose qu'au premier lancer, elle a autant de chances d'atteindre la cible que de la manquer.
Pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on note :

a_n la probabilité qu'Alice atteigne la cible au n-ième lancer ;

b_n la probabilité qu'Alice manque la cible au n-ième lancer ;

$P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne traduisant l'état probabiliste au n-ième lancer.

1. (a) Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B (A représentant l'état « Alice atteint la cible » et B l'état « Alice manque sa cible »).
   (b) Indiquer la matrice de transition M associée à ce graphe. On prendra les sommets A et B dans l'ordre (A,B).
   (c) Justifier que $P_1 = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$ et $P_2 = \begin{pmatrix} 0{,}65 & 0{,}35 \end{pmatrix}$.
2. (a) Montrer que, pour tout nombre entier n strictement positif, $a_{n+1} = 0{,}9a_n + 0{,}4b_n$.
   (b) En déduire que, pour tout nombre entier n strictement positif, $a_{n+1} = 0{,}5a_n + 0{,}4$.
3. (a) Compléter l'algorithme fourni en annexe de façon à ce qu'il affiche l'état probabiliste au n-ième lancer.
   (b) Déterminer l'affichage de cet algorithme pour $n = 5$.
4. (a) On considère la suite (u_n) définie pour tout nombre entier naturel n strictement positif par : $u_n = a_n - 0{,}8$.
   Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   (b) Donner l'expression de u_n en fonction de n, puis en déduire que pour tout nombre entier naturel n strictement positif, $a_n = 0{,}8 - 0{,}3 \times 0{,}5^{n-1}$.
   (c) À long terme, que peut-on penser de la probabilité qu'Alice atteigne la cible ?
   (d) Par quelle autre méthode aurait-on pu trouver le résultat précédent ?

Annexe

Entrées	
	Saisir n
Traitement	
	a prend la valeur 0,5
	b prend la valeur 0,5
	Pour i allant de 2 à n
	a prend la valeur $\ldots \times a + \ldots$
	b prend la valeur $1 - a$
	Fin Pour
Sortie	
	Afficher a, b

2. Antilles — Guyane 19 juin 2014

Les services commerciaux d'une grande surface de produits alimentaires ont défini un profil de client qui a été appelé « consommateur bio ».
Sur la base d'observations réalisées les années précédentes, il a été constaté que :

90 % des clients « consommateurs bio » maintenaient cette pratique l'année suivante ;

15 % des clients n'ayant pas le profil de « consommateurs bio » entraient dans la catégorie « consommateurs bio » l'année suivante.

On suppose que cette évolution se poursuit d'une année à l'autre à partir de 2013, année au cours de laquelle il a été constaté que 20 % des clients ont le profil « consommateur bio ».
Par un tirage aléatoire effectué tous les ans, on choisit un client de cette grande surface.
Pour tout nombre entier naturel n on note :

b_n la probabilité que le client choisi lors de l'année $2013+n$ soit un « consommateur bio » ;

c_n la probabilité que le client choisi lors de l'année $2013+n$ ne soit pas un « consommateur bio » ;

P_n la matrice ligne $\begin{pmatrix} b_n & c_n \end{pmatrix}$ donnant l'état probabiliste lors de l'année $2013+n$.

1. (a) Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets B et C où B correspond à l'état « consommateur bio ».
   (b) Donner P_0 l'état probabiliste en 2013 et la matrice M de transition correspondant à ce graphe, les sommets B et C étant classés dans cet ordre.
   (c) On donne la matrice M^2 :
   $$M^2 = \begin{pmatrix} 0{,}825 & 0{,}175 \\ 0{,}2625 & 0{,}7375 \end{pmatrix}$$
   En précisant la méthode de calcul, déterminer la probabilité que le client choisi en 2015 soit un « consommateur bio ».
   (d) Déterminer l'état stable $\begin{pmatrix} b & c \end{pmatrix}$ du graphe probabiliste.
2. Le directeur du supermarché affirme que, dans un futur proche, plus de la moitié de sa clientèle aura le profil de « consommateur bio ».
   (a) Recopier et compléter l'algorithme suivant qui doit permettre de déterminer le nombre minimal d'années pour que l'affirmation du directeur soit vérifiée.

Variables :	N est un nombre entier naturel non nul
	B un nombre réel
Traitement :	Affecter à N la valeur 0
	Affecter à B la valeur 0,2
	Affecter à C la valeur 0,8
	Tant que $\cdots$
	affecter à B la valeur $0{,}9 \times B + 0{,}15 \times C$
	affecter à C la valeur $1 - B$
	affecter à N la valeur $N+1$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher $\cdots$

   (b) Déterminer le nombre minimal d'années recherché en expliquant la démarche.

3. Asie 19 juin 2014

Partie A

Une entreprise E commande chaque semaine ses fournitures auprès de deux fournisseurs A et H.
Les constats faits les premières semaines conduisent à modéliser l'évolution du choix du fournisseur pour les commandes d'une semaine à l'autre par un graphe probabiliste de sommets A et H où :

-
  - A désigne l'état : « La commande est passée auprès du fournisseur A » ;
  - H désigne l'état : « La commande est passée auprès du fournisseur H ».

La matrice de transition M de ce graphe, en considérant les sommets dans l'ordre A et H est :

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}05 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}$$

1. Dessiner le graphe probabiliste associé à la matrice M.
2. Donner la signification du nombre 0,95 dans la matrice M.

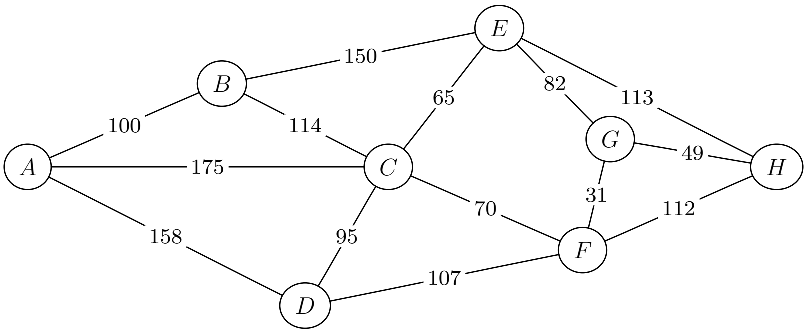
Pour tout entier naturel n, on note :

— a_n la probabilité de l'événement : « la semaine n, l'entreprise E commande ses fournitures auprès du fournisseur A » ;
— h_n la probabilité de l'événement : « la semaine n, l'entreprise E commande ses fournitures auprès du fournisseur H » ;
— P_n la matrice $\begin{pmatrix} a_n & h_n \end{pmatrix}$ correspondant à l'état probabiliste pour la semaine n.

3. Vérifier que la matrice ligne $P = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3} \end{pmatrix}$ correspond à l'état stable du système. En donner une interprétation.
4. On donne $P_0 = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$ et on rappelle que $P_k = P_0 \times M^k$, pour k entier naturel.
   Déterminer la semaine où, pour la première fois, la probabilité que l'entreprise E commande ses fournitures auprès du fournisseur A dépasse la probabilité qu'elle les commande auprès du fournisseur H.

Partie B

Le directeur de l'entreprise E rend visite à ses fournisseurs, il se rend du fournisseur A au fournisseur H et souhaite effectuer le moins de kilomètres possible.
Son assistant dresse le graphe suivant qui schématise les trajets, en kilomètres, entre les six villes de la région, notées B ; C ; D ; E ; F et G et les deux sites, A et H.

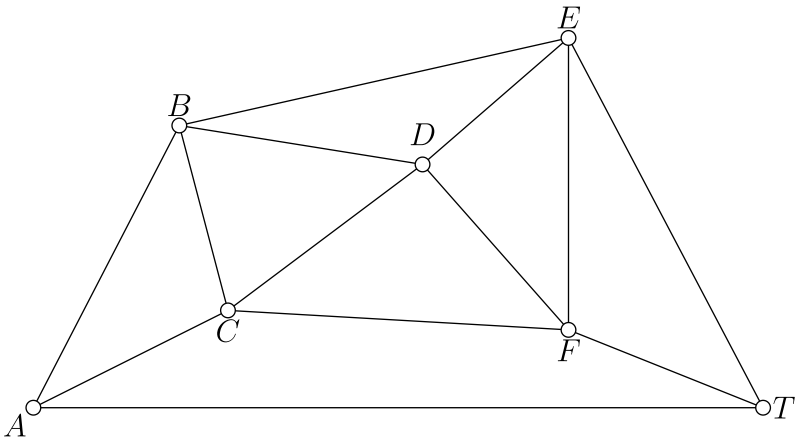


Déterminer l'itinéraire le plus court reliant les deux sites A et H et indiquer le nombre de kilomètres à effectuer. Justifier la réponse.

4. Polynésie 13 juin 2014

Partie A

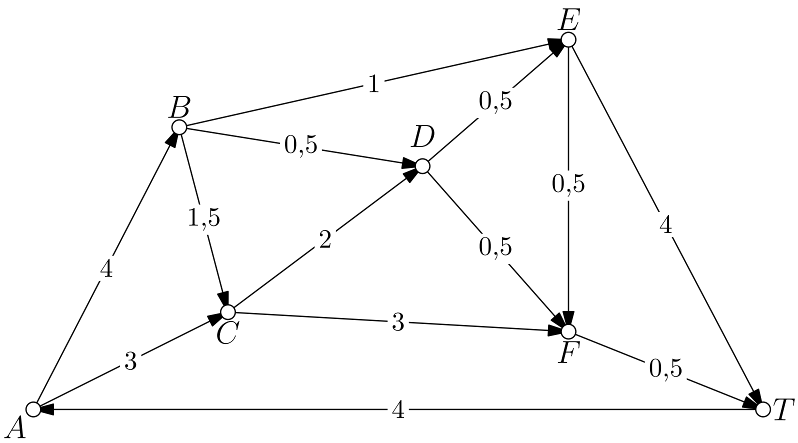
Le graphe ci-dessous représente, dans un aéroport donné, toutes les voies empruntées par les avions au roulage. Ces voies, sur lesquelles circulent les avions avant ou après atterrissage, sont appelées *taxiways*.
Les arêtes du graphe représentent les voies de circulation (les « taxiways ») et les sommets du graphe sont les intersections.



1. Déterminer le nombre de voies de circulation au total.
2. Afin que l'aéroport soit déneigé le plus rapidement possible, est-il possible de planifier un parcours pour que les chasse-neige passent par toutes les voies sans emprunter plusieurs fois la même route ? Justifier la réponse et donner un tel parcours.

Partie B

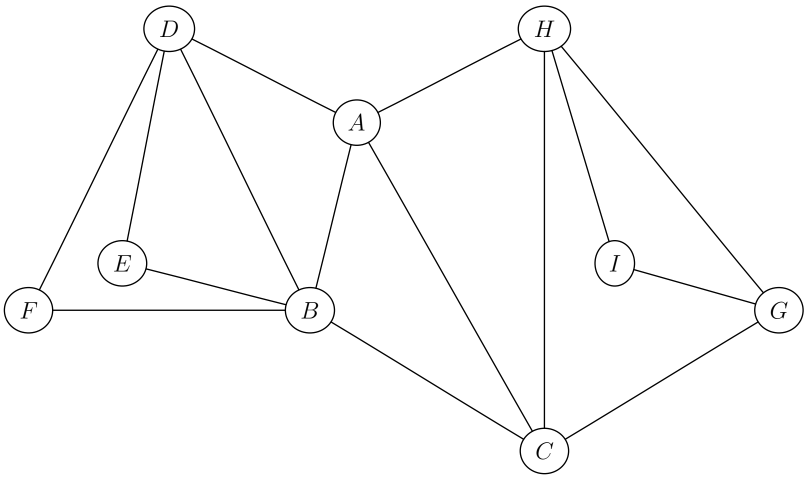
Dans le graphe ci-dessous, on a indiqué le sens de circulation pour les avions dans les différentes voies ainsi que le temps de parcours pour chacune en minute(s).



1. (a) Écrire la matrice M associée à ce graphe (ranger les sommets dans l'ordre alphabétique).
   (b) Citer tous les chemins de longueur 3 reliant A à T.
2. L'avion qui a atterri est en bout de piste en A et doit se rendre le plus rapidement possible au terminal situé au point T.
   Déterminer l'itinéraire le plus rapide et en donner la durée.

5. Centres Étrangers 12 juin 2014

Partie A : Étude d'un graphe
on considère le graphe $\mathscr{G}$ ci-dessous.

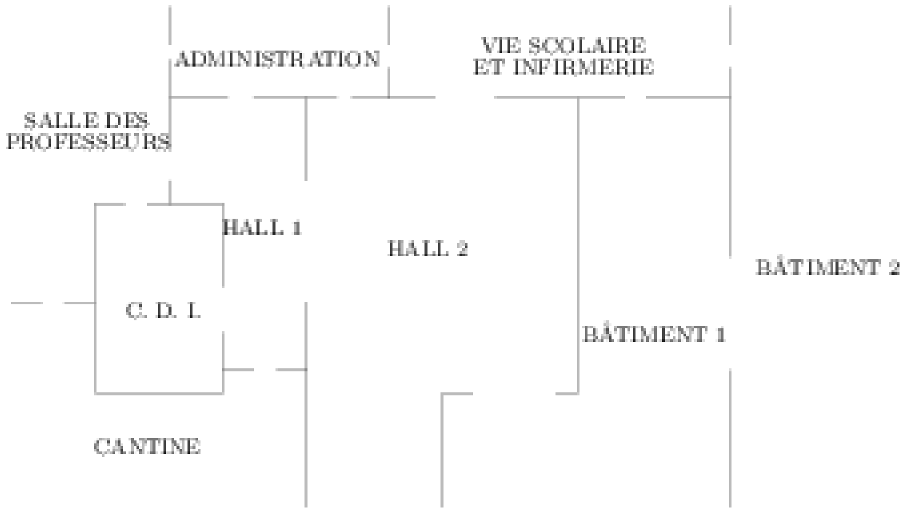


1. (a) Déterminer en justifiant si le graphe $\mathscr{G}$ est complet.
   (b) Déterminer en justifiant si le graphe $\mathscr{G}$ est connexe.
2. (a) Donner le degré de chacun des sommets du graphe $\mathscr{G}$.
   (b) Déterminer en justifiant si le graphe $\mathscr{G}$ admet un cycle eulérien ou une chaîne eulérienne.
3. (a) Donner la matrice M associée au graphe $\mathscr{G}$ (les sommets seront rangés dans l'ordre alphabétique).
   (b) On donne $M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
   Montrer, par le calcul, que le coefficient de la septième ligne et quatrième colonne de la matrice M^3 est égal à 3.

Partie B : Applications

Dans cette partie, on pourra justifier les réponses en s'aidant de la partie A.

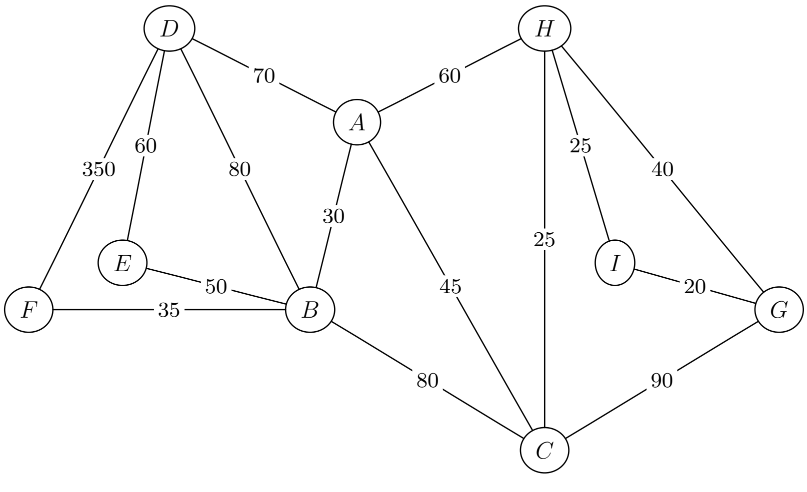
On donne ci-dessous le plan simplifié d'un lycée.



1. Le graphe $\mathcal{G}$ donné en partie A modélise cette situation.
   Recopier et compléter le tableau suivant :

Sommet du graphe $\mathcal{G}$	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Lieu correspondant dans le lycée									

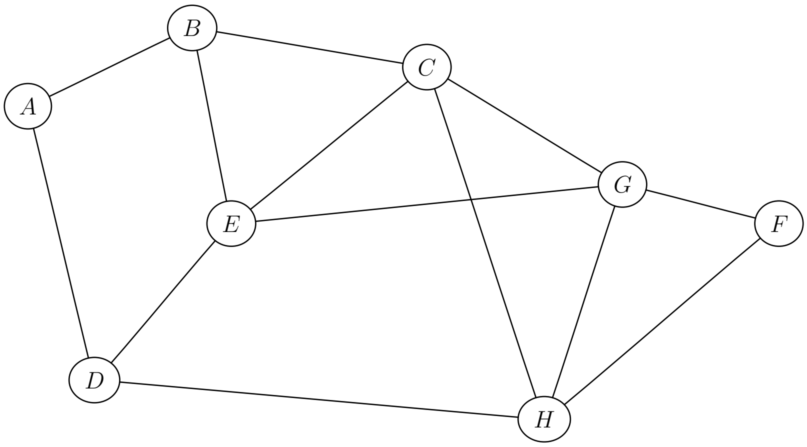
2. Un élève a cours de mathématiques dans le bâtiment 1. À la fin du cours, il doit rejoindre la salle des professeurs pour un rendez vous avec ses parents.
   Déterminer le nombre de chemins en trois étapes permettant à l'élève de rejoindre ses parents puis indiquer quels sont ces chemins.
3. Le lycée organise une journée portes-ouvertes.
   (a) Déterminer, en justifiant, s'il est possible de visiter le lycée en empruntant une seule fois chaque passage entre les différents lieux.
   (b) Sur les arêtes du graphe $\mathcal{G}$ sont indiqués les temps de parcours exprimés en secondes entre deux endroits du lycée.



Déterminer, à l'aide de l'algorithme de Dijkstra, le chemin permettant de relier le sommet G au sommet D en un temps minimal.
Déterminer ce temps minimal, exprimé en secondes.

6. Amérique du Nord 30 mai 2014

Lors d'une campagne électorale, un homme politique doit effectuer une tournée dans les villes A, B, C, D, E, F, G et H, en utilisant le réseau autoroutier. Le graphe $\mathscr{G}$ ci-dessous, représente les différentes villes de la tournée et les tronçons d'autoroute reliant ces villes (une ville est représentée par un sommet, un tronçon d'autoroute par une arête) :



Partie A

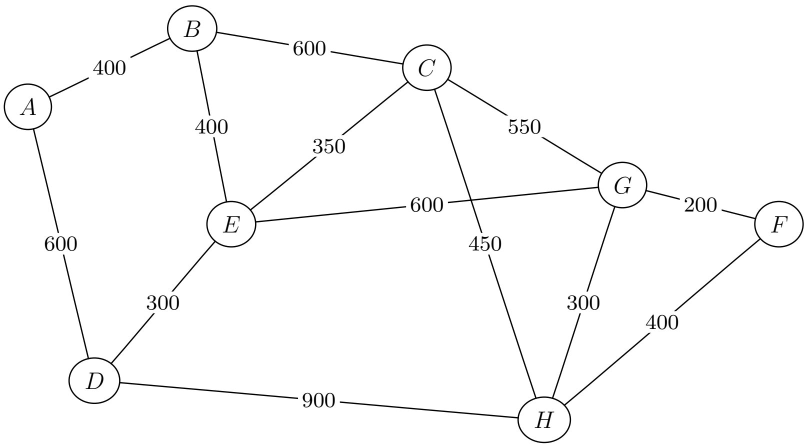
1. Déterminer, en justifiant, si le graphe $\mathscr{G}$ est :
   (a) complet ;
   (b) connexe.
2. (a) Justifier qu'il est possible d'organiser la tournée en passant au moins une fois par chaque ville, tout en empruntant une fois et une seule chaque tronçon d'autoroute.
   (b) Citer un trajet de ce type.
3. On appelle M la matrice d'adjacence associée au graphe $\mathscr{G}$ (les sommets étant pris dans l'ordre alphabétique).
   (a) Déterminer la matrice M.
   (b) On donne la matrice

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 & 5 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 7 & 2 & 8 & 3 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 6 & 4 & 9 & 3 & 9 & 10 \\ 5 & 2 & 4 & 0 & 9 & 2 & 3 & 8 \\ 1 & 8 & 9 & 9 & 4 & 4 & 10 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 4 & 2 & 6 & 6 \\ 4 & 3 & 9 & 3 & 10 & 6 & 6 & 9 \\ 1 & 5 & 10 & 8 & 4 & 6 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

   Déterminer, en justifiant, le nombre de chemins de longueur 3 reliant E à H.
   Préciser ces chemins.

Partie B

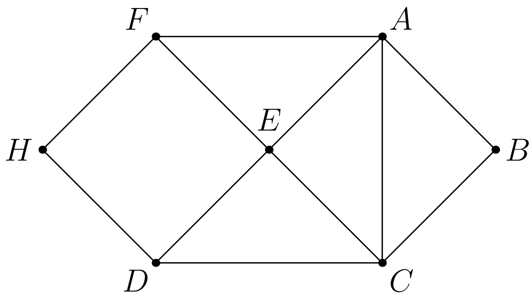
Des contraintes d'organisation obligent cet homme politique à se rendre dans la ville F après la ville A. Le graphe $\mathscr{G}$ est complété ci-dessous par les longueurs en kilomètre de chaque tronçon d'autoroute.



Déterminer, en utilisant l'algorithme de Dijkstra, le trajet autoroutier le plus court pour aller de A à F.
Préciser la longueur en kilomètre de ce trajet.

7. Liban 27 mai 2014

On a schématisé ci-dessous le plan d'une MJC (Maison de la Jeunesse et de la Culture) par un graphe dont les sommets sont les salles et les arêtes sont les passages (portes, couloirs ou escaliers) entre les salles. On appelle H le hall d'entrée et B le bureau du directeur.

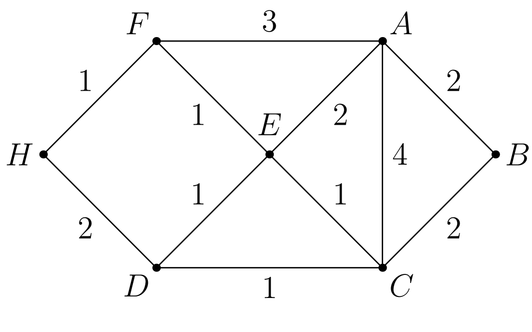


En fin de journée, un agent de service fait le tour de la MJC pour récupérer dans chaque salle (bureau du directeur et hall inclus) les objets oubliés par les enfants.

1. Préciser si ce graphe est connexe en justifiant la réponse.
2. Déterminer, en justifiant, si l'agent de service peut passer par toutes les salles en utilisant une fois et une seule chaque passage.
3. On range les sommets par ordre alphabétique.
   Donner la matrice d'adjacence M associée à ce graphe.
4. On donne :

$$M^4 = \begin{pmatrix} 31 & 15 & 26 & 21 & 18 & 12 & \\ 15 & 12 & 15 & 12 & 18 & 12 & 6 \\ 26 & 15 & 31 & 18 & 27 & 21 & 12 \\ 21 & 12 & 18 & 20 & 17 & 18 & 5 \\ 27 & 18 & 27 & 17 & 34 & 17 & 16 \\ 18 & 12 & 21 & 18 & 17 & 20 & 5 \\ 12 & 6 & 12 & 5 & 16 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

   En déduire le nombre de chemins de longueur 4 entre les sommets B et H.
5. On a indiqué sur le graphe ci-dessous le temps en minute mis pour passer entre les différentes salles en ouvrant et fermant les portes à clé.



   Déterminer le plus court chemin entre le bureau du directeur et le hall.

8. Pondichéry 7 avril 2014

Les parties A et B sont indépendantes

Deux sociétés, Ultra-eau (U) et Vital-eau (V), se partagent le marché des fontaines d'eau à bonbonnes dans les entreprises d'une grande ville.

Partie A

En 2013, l'entreprise U avait 45 % du marché et l'entreprise V le reste. Chaque année, l'entreprise U conserve 90 % de ses clients, les autres choisissent l'entreprise V. Quant à l'entreprise V, elle conserve 85 % de ses clients, les autres choisissent l'entreprise U.
On choisit un client au hasard tous les ans et on note pour tout entier naturel n :

u_n **:** la probabilité qu'il soit un client de l'entreprise U l'année $2013 + n$, ainsi $u_0 = 0{,}45$;

v_n **:** la probabilité qu'il soit un client de l'entreprise V l'année $2013 + n$.

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets U et V.
2. Donner v_0 , calculer u_1 et v_1.
3. On considère l'algorithme (incomplet) donné en annexe. Celui-ci doit donner en sortie les valeurs de u_n et v_n pour un entier naturel n saisi en entrée. Compléter les lignes (L5) et (L8) de l'algorithme pour obtenir le résultat attendu.
4. On admet que, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}75u_n + 0{,}15$. On note, pour tout nombre entier naturel n, $w_n = u_n - 0{,}6$.
   (a) Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison 0,75.
   (b) Quelle est la limite de la suite (w_n) ?
   En déduire la limite de la suite (u_n). Interpréter le résultat dans le contexte de cet exercice.

Partie B

L'entreprise U fournit ses clients en recharges pour les fontaines à eau et dispose des résultats antérieurs suivants :

Nombre de recharges en milliers	1	3	5
Coût total annuel de production en centaines d'euros	11	27,4	83

Le coût total de production est modélisé par une fonction C définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\ ;\ 10]$ par :

$$C(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 10$$

où a, b et c sont des nombres réels.

Lorsque le nombre x désigne le nombre de milliers de recharges produites, $C(x)$ est le coût total de production en centaines d'euros.
On admet que le triplet (a,b,c) est solution du système (S).

$$(S) : \begin{cases} a+b+c & = 1 \\ 27a+9b+3c & = 17{,}4 \\ 125a+25b+5c & = 73 \end{cases} \text{ et on pose } X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

1. (a) Écrire ce système sous la forme $MX = Y$ où M et Y sont des matrices que l'on précisera.

(b) On admet que la matrice M est inversible. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, le triplet (a,b,c) solution du système (S).

2. En utilisant cette modélisation, quel serait le coût total annuel de production pour 8 000 recharges d'eau produites ?

Annexe à l'exercice 2

Recopier sur la copie la partie « traitement » (lignes L3 à L9) en complétant les lignes L5 et L8.

Variables :	N est un nombre entier naturel non nul	L1
	U et V sont des nombres réels	L2
Traitement :	Saisir une valeur pour N	L3
	Affecter à U la valeur 0,45	L4
	Affecter à V la valeur	L5
	Pour i allant de 1 jusqu'à N	L6
	| Affecter à U la valeur $0{,}9 \times U + 0{,}15 \times V$	L7
	| Affecter à V la valeur	L8
	Fin Pour	L9
Sortie :	Afficher U et Afficher V	L10

9. Nouvelle-Calédonie 7 mars 2014

On a observé l'évolution des inscriptions dans le club de gymnastique d'une ville.

Chaque année, 30 % des personnes inscrites au club de gymnastique l'année précédente renouvellent leur inscription au club.
De plus, chaque année, 10 % des habitants de la ville qui n'étaient pas inscrits au club l'année précédente s'y inscrivent.

On appelle n le nombre d'années d'existence du club.
On note g_n la proportion de la population de la ville inscrite au club de gymnastique lors de l'année n et p_n la proportion de la population qui n'y est pas inscrite.
La première année de fonctionnement du club (année « zéro »), 20 % des habitants de la ville se sont inscrits.
On note $E_n = \begin{pmatrix} g_n & p_n \end{pmatrix}$ la matrice traduisant l'état probabiliste de l'année n. On a donc $E_0 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$.

1. Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste.
2. On nomme A la matrice de transition associée à cette situation, c'est-à-dire la matrice vérifiant : pour tout entier naturel n, $E_{n+1} = E_n \times A$.
   Donner la matrice A.
3. Déterminer E_1 et E_2 . Interpréter les résultats.
4. Déterminer l'état probabiliste stable (on donnera les coefficients de la matrice ligne sous la forme de fractions irréductibles).
   Comment peut-on interpréter ce résultat ?

10. Amérique du Sud 21 novembre 2013

Une étude est réalisée chaque hiver sur une population composée de personnes qui peuvent pratiquer le ski de piste ou le snowboard.
L'étude révèle que :

- Si une personne pratique le ski de piste, alors la probabilité qu'elle pratique le snowboard l'hiver suivant est égale à 0,2.
- Si une personne pratique le snowboard, alors la probabilité qu'elle pratique le ski de piste l'hiver suivant est égale à 0,3.

On note S l'état : « la personne pratique le ski de piste » et $\overline{S}$ l'état : « la personne pratique le snowboard ».
On note également pour tout entier naturel n :

- p_n la probabilité qu'une personne pratique le ski de piste lors du n-ième hiver ;
- q_n la probabilité qu'une personne pratique le snowboard lors du n-ième hiver ;
- $P_n = \begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste du système lors du n-ième hiver.

On suppose que la population initiale ne comporte que des personnes pratiquant le ski de piste, on a donc $P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Partie A

1. Représenter la situation à l'aide d'un graphe probabiliste de sommets S et $\overline{S}$.
2. (a) Donner la matrice de transition M de ce graphe probabiliste.
   (b) Calculer M^2.
   (c) Déterminer l'état probabiliste P_2.
3. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $p_{n+1} = 0{,}5\,p_n + 0{,}3$.
4. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	
①	J et N sont des entiers naturels
②	p est un nombre réel
Entrée :	
③	Saisir N
Initialisation :	
④	p prends la valeur 1
traitement :	
⑤	Pour J allant de 1 à N
⑥	p prend la valeur ....
⑦	Fin Pour
Sortie :	
⑧	Afficher p

Recopier et compléter la ligne ⑥ de cet algorithme afin d'obtenir la probabilité p_N.

Partie B

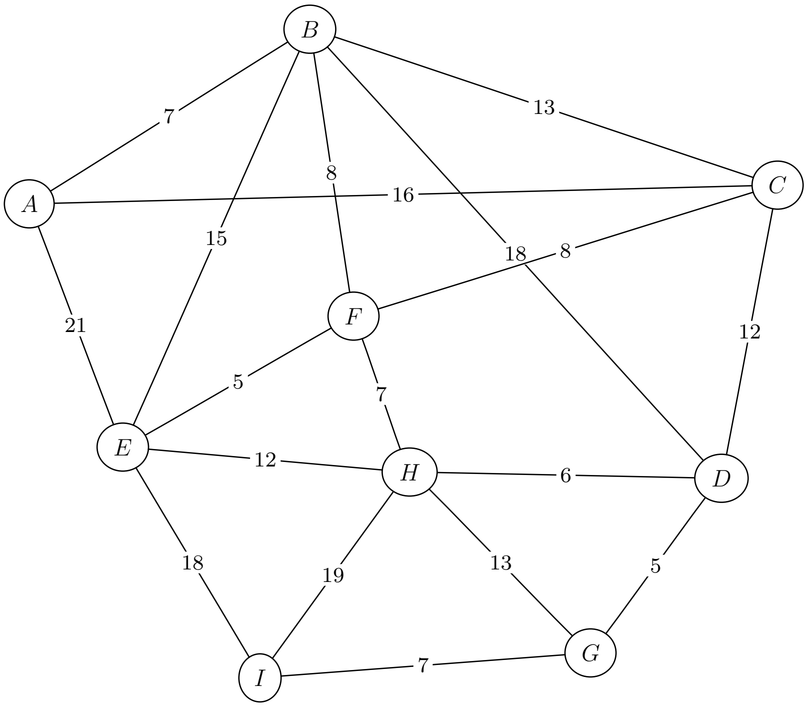
On considère, pour tout entier naturel n, l'évènement S_n : « la personne pratique le ski de piste lors du n-ième hiver ». La probabilité de l'évènement S_n est notée $p(S_n)$.
On a donc $p_n = p(S_n)$.
On sait, d'après la **partie A**, que pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = 0{,}5\,p_n + 0{,}3$.
Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = p_n - 0{,}6$.

1. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,5 et préciser la valeur de u_0.

2. En déduire l'expression de u_n en fonction de n puis l'expression de p_n en fonction de n.
3. Déterminer la limite de la suite p_n et interpréter le résultat.

Partie C

Une partie du domaine skiable est représentée par le graphe ci-dessous.
Le sommet A représente le haut des pistes de ski et le sommet I en représente le bas.
Les sommets B, C, D, E, F, G et H représentent des points de passages.
Chacune des arêtes est pondérée par la distance, en centaine de mètres, entre deux sommets.



Déterminer, à l'aide de l'algorithme de Dijkstra, la distance minimale permettant de relier le sommet A au sommet I.

11. Nouvelle-Calédonie 18 novembre 2013 (5 points)

Dans la commune de Girouette, deux partis s'affrontent aux élections tous les ans.
En 2010, le parti Hirondelle l'a emporté avec 70 % des voix contre 30 % au parti Phénix.

On admet qu'à partir de l'année 2010 :

14 % des électeurs votant pour le parti Hirondelle à une élection voteront pour le parti Phénix à l'élection suivante.

6 % des électeurs votant pour le parti Phénix à une élection voteront pour le parti Hirondelle à l'élection suivante.

Les autres ne changent pas d'avis.

On considère un électeur de Girouette choisi au hasard.
On note H l'état « L'électeur vote pour le parti Hirondelle » et P l'état « L'électeur vote pour le parti Phénix ».

1. (a) Représenter le graphe probabiliste associé à cette situation.
   (b) Déterminer la matrice de transition M en considérant les états dans l'ordre alphabétique.
2. on appelle $E_n = \begin{pmatrix} h_n & p_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne de l'état probabiliste de l'année $2010+n$.
   On a donc $E_0 = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \end{pmatrix}$.
   Déterminer E_1 et E_4 . (On arrondira les coefficients de E_4 au centième). Interpréter les résultats.
3. (a) Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $h_{n+1} = 0{,}8h_n + 0{,}06$.
   (b) On définit la suite (u_n) par : pour tout entier naturel n, $u_n = h_n - 0{,}3$.
   Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique.
   (c) Montrer que pour tout entier naturel n, $h_n = 0{,}3 + 0{,}4 \times 0{,}8^n$.
4. À partir de combien d'années la probabilité qu'un électeur choisi au hasard vote pour le parti Hirondelle sera-t-elle strictement inférieure à 0,32 ?

12. Métropole Réunion 13 septembre 2013

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Un lycée d'une grande ville de province organise un forum des grandes écoles de la région pour aider ses élèves dans leurs choix d'orientation post-bac.

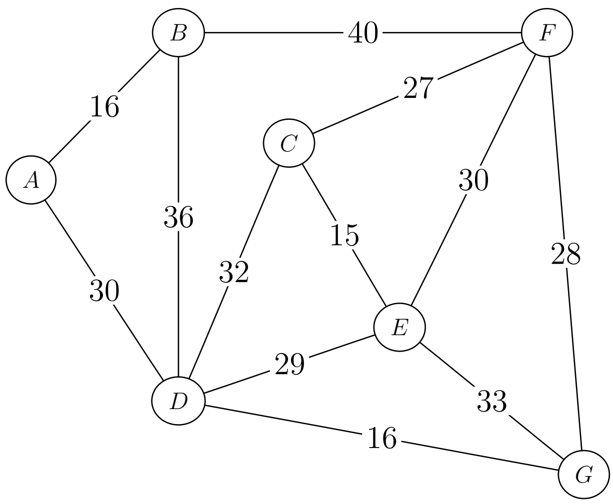
Partie A

Une des écoles a effectué une étude sur la mobilité des étudiants de la promotion de 2008 en ce qui concerne les choix de carrière.
Elle a relevé qu'en 2008, à la fin de leurs études, 25 % des diplômés sont partis travailler à l'étranger alors que le reste de la promotion a trouvé du travail en France.
On a observé ensuite qu'à la fin de chaque année, 20 % des personnes ayant opté pour l'étranger reviennent sur un poste en France alors que 10 % des personnes travaillant en France trouvent un poste à l'étranger. On considère que cette situation perdure.
On note $P_n = \begin{pmatrix} e_n & l_n \end{pmatrix}$ la matrice correspondant à l'état probabiliste en $2008 + n$, avec e_n la probabilité que la personne travaille à l'étranger, l_n celle qu'elle travaille en France.
Ainsi, $P_0 = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}75 \end{pmatrix}$.

1. Proposer le graphe probabiliste associé à cette situation. On désignera par E (étranger) et F (France) les deux sommets.
2. Donner la matrice de transition M associée en prenant les sommets dans l'ordre E puis F.
3. Montrer qu'en 2011, la proportion des étudiants de la promotion 2008 travaillant à l'étranger est de 30, 475 %.
4. Déterminer l'état stable du graphe probabiliste et interpréter le résultat obtenu.

Partie B

Pour clôturer cette journée, un groupe de lycéens musiciens a décidé d'organiser un concert. Ils décident de faire le tour de tous les lycées de la ville et de distribuer des prospectus sur le trajet pour faire de la publicité pour cette soirée. Les membres du groupe ont établi le graphe ci-contre.
Les sommets représentent les différents lycées et les arêtes, les rues reliant les établissements. Les arêtes sont pondérées par les durées des trajets entre deux sommets consécutifs, exprimées en minutes.



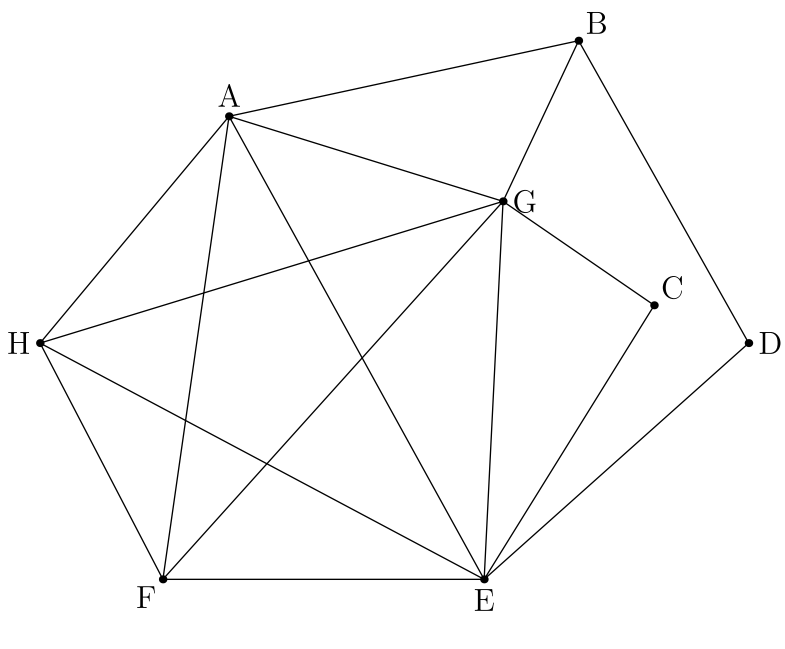
13. Antilles Guyane 12 septembre 2013

Une entreprise de produits cosmétiques fait réaliser une étude marketing sur une population donnée.

Cette étude montre que lors de la sortie d'une nouvelle crème hydratante, la probabilité qu'une cliente l'achète lors de la première vente promotionnelle est de 0,2.
De plus, lorsqu'une cliente a acheté une crème hydratante lors d'une vente promotionnelle, la probabilité qu'elle en achète à nouveau lors de la vente promotionnelle suivante est de 0,8. Lorsqu'une cliente n'a pas acheté de crème hydratante, la probabilité pour qu'elle en achète à la vente promotionnelle suivante est de 0,3.
n étant un entier naturel non nul, on note :

- a_n la probabilité qu'une cliente achète une crème hydratante lors de la n-ième vente promotionnelle.
- b_n la probabilité qu'une cliente n'achète pas une crème hydratante lors de la n-ième vente promotionnelle.
- $P_n = \begin{pmatrix} a_n & n_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne traduisant l'état probabiliste à la n-ième vente promotionnelle.

1. (a) Déterminer P_1.
   (b) Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets :
   V quand il y a achat ;
   $\overline{V}$ quand il n'y a pas achat.
2. (a) Écrire la matrice M de transition associée à ce graphe.
   (b) Calculer P_2 et P_3. D'après ces résultats, quel est l'effet de ces trois premières ventes promotionnelles ?
3. Justifier qu'il existe un état stable $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ pour cette situation. Le déterminer.
4. L'étude marketing montre que certains produits ne sont jamais achetés simultanément. On représente les incompatibilités par le graphe suivant, où deux sommets reliés représentent deux produits qui ne sont jamais dans une même commande. Par exemple, les produits A et B, représentés par des sommets reliés, ne sont jamais dans une même commande.



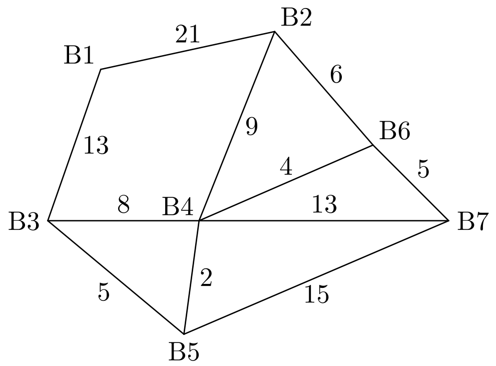
L'entreprise souhaite répartir les produits dans des lots constitués de produits ne présentant aucune incompatibilité d'achat. Combien de lots doit-elle prévoir au minimum ? Justifier votre réponse à l'aide d'un algorithme et proposer une répartition des produits.

14. Polynésie 4 septembre 2013

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

Un club sportif organise une course d'orientation. Sept postes de contrôles (appelés balises) sont prévus.
Les sept balises notées B1 ; B2 ; ... ; B7 sont représentées sur le graphe ci-contre. Les arêtes du graphe représentent les chemins possibles entre les balises et sur chaque arête est indiqué le temps de parcours estimé en minutes.



1. (a) Le graphe est-il connexe ? Justifier la réponse.
   (b) Existe-t-il un parcours qui permet de revenir à une balise de départ en passant une et une seule fois par tous les chemins ? Justifier la réponse.
   (c) Existe-t-il un parcours qui permet de relier deux balises différentes en passant une et une seule fois par tous les chemins ?
2. Les organisateurs décident de situer le départ à la balise B1 et l'arrivée à la balise B7. Chaque participant doit rallier la balise B7 en un minimum de temps. Ils ne sont pas tenus à emprunter tous les chemins.
   Quelle est la durée minimale du parcours possible et quel est ce parcours ? Justifier votre réponse à l'aide d'un algorithme.

Partie B

Depuis l'année 2011, ce club sportif propose à ses licenciés une assurance spécifique. La première année, 80 % des licenciés y ont adhéré. En 2012, 70 % des licenciés ayant adhéré en 2011 ont conservé cette assurance et 60 % de ceux n'ayant pas adhéré en 2011 ont adhéré en 2012.
En supposant que cette évolution se maintienne, le club sportif souhaite savoir quel pourcentage de licenciés adhèrera à cette assurance à plus long terme. On note :

A « le licencié est assuré »

B « le licencié n'est pas assuré »

Pour tout entier n non nul, l'état probabiliste du nombre d'assurés l'année $2011 + n$ est défini par la matrice ligne $P_n = (x_n \quad y_n)$ où x_n désigne la probabilité pour un licencié d'être assuré l'année $2011 + n$.

1. Représenter cette situation par un graphe probabiliste de sommets A et B.
2. Écrire la matrice de transition M de ce graphe en prenant les sommets A et B dans cet ordre.
3. En remarquant que $P_0 = (0{,}8 \quad 0{,}2)$, déterminer P_1. Interpréter ce résultat.
4. Le club sportif maintiendra son offre d'assurance spécifique si le nombre d'assurés reste supérieur à 55 %. L'évolution prévue lui permet-elle d'envisager le maintien de son offre à long terme ?

15. Métropole sujet dévoilé juin 2013

Dans une entreprise, la société de débit boisson CAFTHÉ installe deux machines : l'une ne sert que du café et l'autre ne sert que du thé.
Chaque jour lors de la pause déjeuner, chaque employé de l'entreprise choisit une boisson, et une seule : café ou thé. On suppose que le nombre total d'employés de l'entreprise reste constant au cours du temps.
La société CAFTHÉ pense que la machine à café sera toujours la plus utilisée. Une enquête, effectuée sur plusieurs jours, auprès des employés pour connaitre leurs choix de boisson a montré que :

- 97 % des employés qui choisissent un café prennent encore un café le lendemain.
- 98 % des employés qui choisissent un thé prennent encore un thé le lendemain.

On admet que cette tendance se poursuit les jours suivants.

Le premier jour, 70 % des employés ont choisi un café.
On note C l'état « L'employé choisit un café » et T l'état « L'employé choisit un thé ».
Pour tout entier naturel n, on note :

- c_n la probabilité de l'événement « un employé, pris au hasard, choisit un café le jour n ».
- t_n la probabilité de l'événement « un employé, pris au hasard, choisit un thé le jour n ».
- P_n la matrice $\begin{pmatrix} c_n & t_n \end{pmatrix}$ correspondant à l'état probabiliste le jour n.

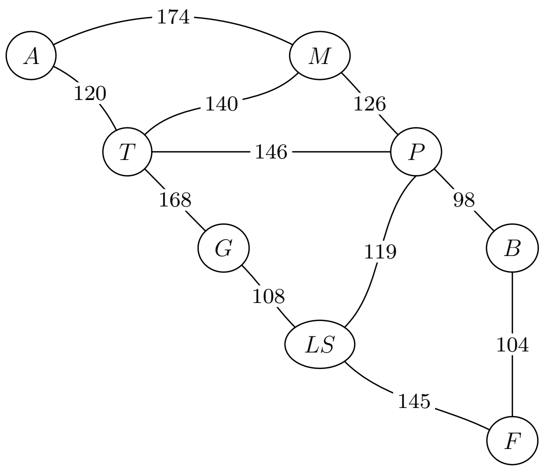
1. Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste.
2. Déterminer la matrice P_1 donnant l'état probabiliste le premier jour.
3. La matrice de transition M de ce graphe, en considérant les sommets dans l'ordre C et T est $M = \begin{pmatrix} 0{,}97 & 0{,}03 \\ 0{,}02 & 0{,}98 \end{pmatrix}$.
   Déterminer la probabilité, arrondie au centième, qu'un employé choisisse un thé le quatrième jour.
4. (a) Montrer que l'état stable est $\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$.
   (b) Est-ce que la société CAFTÉ avait raison quant à l'utilisation de la machine à café à long terme ?
5. (a) Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n.
   En déduire que pour tout entier n, on a $c_{n+1} = 0{,}95 \times c_n + 0{,}02$.
   (b) On considère l'algorithme suivant :

Variables :	A es un réel
	i et n sont des entiers naturels
Entrée :	Saisir n
Initialisation :	Affecter à A la valeur 0,70.
Traitement :	Pour i allant de 1 à n
	Affecter à A la valeur $0{,}95 \times A + 0{,}02$
	Fin Pour
Sortie :	Afficher A

   En faisant apparaître les différentes étapes, donner la valeur affichée par cet algorithme lorsque la valeur de n est égale à 3.
   Que permet de déterminer cet algorithme ?

16. Métropole 20 juin 2013

Un chauffeur-livreur réside en Italie dans la ville d'Aoste.
Quatre fois par mois, son employeur l'envoie livrer du matériel informatique dans la ville de Florence.
Il est établi que le trajet en camion coûte, en carburant, 0,51 euro au kilomètre. Le chauffeur dispose d'un budget mensuel de 2 200 euros pour son carburant. Ce qu'il réussit à économiser lui permet de toucher une prime P équivalente en fin de mois. Il consulte donc la carte routière ci-dessous pour optimiser ses trajets.
Le graphe ci-dessous indique les distances entre différentes villes d'Italie : Aoste, Milan, Parme, Turin, Gènes, La Spézia, Bologne et Florence. Chaque ville est désignée par son initiale.



Les deux parties sont indépendantes.

Partie A : étude du trajet

1. Déterminer le trajet le plus court entre Aoste et Florence (On indiquera les villes parcourues et l'ordre de parcours).
2. Déterminer le budget carburant nécessaire aux quatre voyages aller-retour du mois (le résultat sera arrondi à l'euro près).

   En déduire le montant de la prime P qui lui sera versée en fin de mois, à l'euro près.

Partie B : traversée de Parme

Durant son trajet, le chauffeur est obligé de traverser Parme et ses très nombreux feux tricolores. Lorsque le feu est orange, le chauffeur se comporte comme lorsqu'il est rouge, il s'arrête.
L'expérience lui a permis d'établir que s'il se présente à un feu, il se produit les évènements suivants :

— Arrivé au feu, celui-ci est au vert (V) : la probabilité que le suivant soit vert est de 0, 85.

— Arrivé au feu, celui-ci est orange ou rouge (R) : la probabilité que le suivant soit vert est de 0, 30.

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste.
2. Indiquer la matrice de transition M du graphe, en considérant les sommets dans l'ordre $(V; R)$ en ligne comme en colonne.

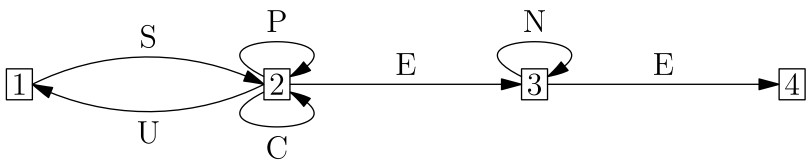
3. Le premier feu rencontré est vert. La matrice P_1 donnant l'état initial est donc $\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}$.
   (a) Déterminer les matrices $P_2 = P_1 \times M$ et $P_3 = P_2 \times M$. (Le détail des calculs n'est pas demandé).
   (b) Conclure quant à la probabilité p de l'événement « Le chauffeur doit s'arrêter au troisième feu ».

17. Asie 19 juin 2013

Les deux parties de l'exercice sont indépendantes.

Partie A

Pour accéder à sa messagerie, Antoine a choisi un code qui doit être reconnu par le graphe étiqueté suivant, de sommets 1, 2, 3 et 4 :



Une succession des lettres constitue un code possible si ces lettres se succèdent sur un chemin du graphe orienté ci-dessus, en partant du sommet 1 et en sortant au sommet 4. Les codes SES et SPPCES sont ainsi des codes possibles, contrairement aux codes SUN et SPEN.

1. Parmi les trois codes suivants, écrire sur votre copie le (ou les) code(s) reconnu(s) par le graphe

   SUCCÈS SCENES SUSPENS

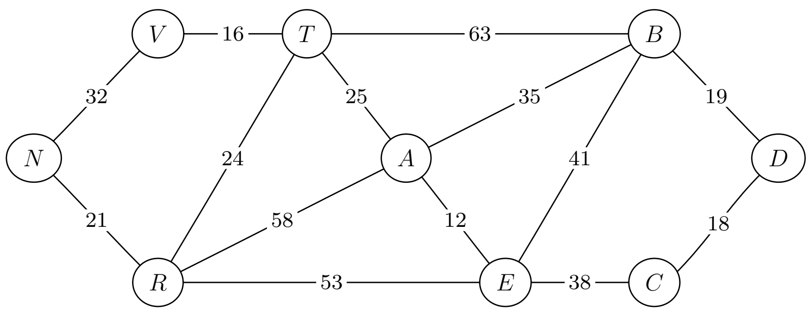
2. Recopier et compléter la matrice d'adjacence A associée au graphe. On prendra les sommets dans l'ordre 1-2-3-4.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

3. Avec une calculatrice, on a trouvé $A^4 = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 8 & 3 \\ 12 & 29 & 20 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   En déduire le nombres de codes de 4 lettres reconnus par le graphe. Quels sont ces codes ?

Partie B



Antoine décide d'aller visiter neuf châteaux de la Loire.
Il a construit le graphe ci-dessus où les sommets représentent :

A : Amboise	B : Blois	C : Cheverny	D : Chambord
E : Chenonceau	T : Tours	V : Villandry	R : Azay-le-Rideau
N : Chinon			

Sur les arêtes sont indiquées les distances en km.

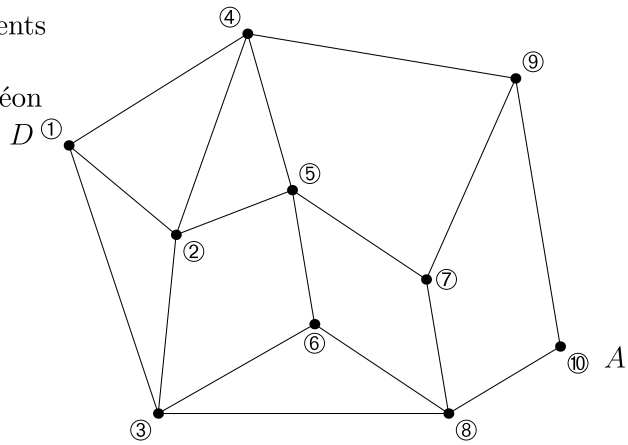
1. Antoine peut-il partir de Blois et y revenir, en parcourant une et une seule fois chacune des routes matérialisées par les arêtes de ce graphe ? On justifiera la réponse.
2. Déterminer le plus court chemin pour aller du château de Chambord au château de Chinon. On donnera le parcours ainsi que le nombre total de kilomètres.

18. Antilles Guyane 19 juin 2013

Un guide de randonnée en montagne décrit les itinéraires possibles autour d'un pic rocheux. La description des itinéraires est donnée par le graphe ci-contre. Les sommets de ce graphe correspondent aux lieux remarquables. Les arêtes de ce graphe représentent les sentiers possibles entre ces lieux.

Légende :

① Départ	② Passerelle
③ Roche percée	④ Col des 3 vents
⑤ Pic rouge	⑥ Refuge
⑦ Col vert	⑧ Pont Napoléon
⑨ Cascade des anglais	⑩ Arrivée



1. Donner un itinéraire allant de D à A passant par tous les sommets du graphe une seule fois mais n'empruntant pas forcément tous les sentiers.
2. Existe-t-il un itinéraire allant de D à A utilisant tous les sentiers une seule fois ?

   Justifier votre réponse.
3. On note M la matrice d'adjacence associée à ce graphe, les sommets étant pris dans l'ordre. On donne ci-contre M^5.

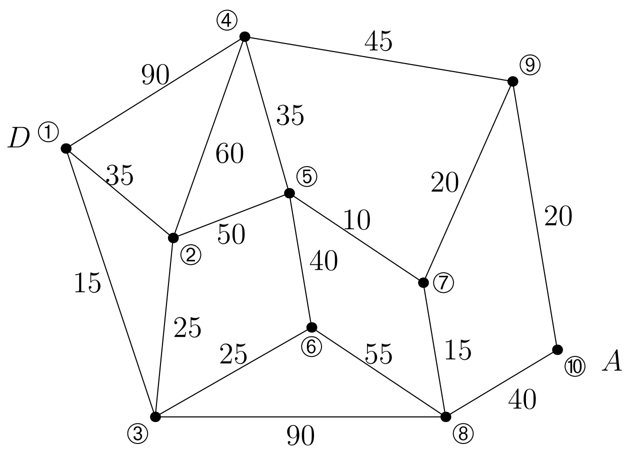
$$M^5 = \begin{pmatrix} 56 & 78 & 75 & 82 & 59 & 57 & 54 & 40 & 26 & 31 \\ 78 & 88 & 95 & 89 & 96 & 57 & 50 & 65 & 48 & 30 \\ 75 & 95 & 68 & 68 & 77 & 68 & 49 & 73 & 52 & 23 \\ 82 & 89 & 68 & 62 & 98 & 49 & 29 & 79 & 67 & 13 \\ 59 & 96 & 77 & 98 & 50 & 82 & 80 & 40 & 24 & 46 \\ 57 & 57 & 68 & 49 & 82 & 36 & 25 & 68 & 49 & 16 \\ 54 & 50 & 46 & 29 & 80 & 25 & 10 & 73 & 60 & 5 \\ 40 & 65 & 73 & 79 & 40 & 68 & 73 & 32 & 14 & 48 \\ 26 & 48 & 52 & 67 & 24 & 49 & 60 & 14 & 6 & 39 \\ 31 & 30 & 23 & 13 & 46 & 16 & 5 & 48 & 39 & 2 \end{pmatrix}$$

   (a) Que représente le nombre 89 situé sur la deuxième ligne et la quatrième colonne ?

   (b) Déterminer le nombre d'itinéraires allant de D à A empruntant 5 sentiers. Citer un tel itinéraire passant par le pic rouge.
4. On a complété ci-contre le graphe décrivant les itinéraires avec les temps de parcours en minutes pour chacun des sentiers.

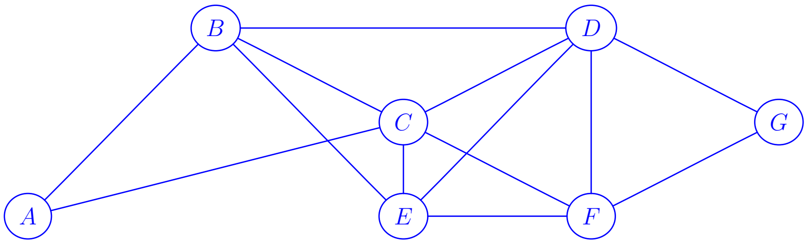
   Déterminer l'itinéraire allant de D à A le plus court en temps.

   On fera apparaître la démarche en utilisant un algorithme.



19. Centres Étrangers groupe 1 12 juin 2013

Dans le graphe ci-dessous, les sommets représentent différentes zones de résidence ou d'activités d'une municipalité. Une arête reliant deux de ces sommets indique l'existence d'une voie d'accès principale entre deux lieux correspondants.

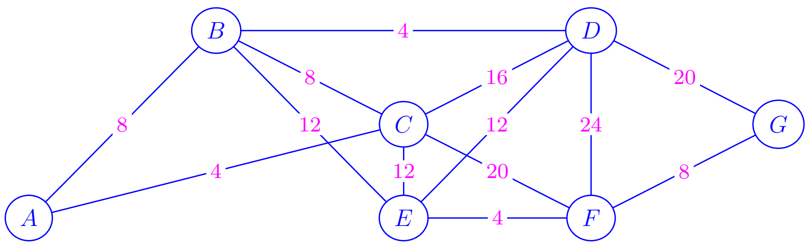


1. Donner, sans justifier, le degré de chacun des sommets (la réponse pourra être présentée sous forme d'un tableau où les sommets seront mis dans l'ordre alphabétique).
2. (a) Donner la matrice M associée au graphe (les sommets seront mis dans l'ordre alphabétique).

   (b) On donne la matrice $M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 8 & 5 & 5 & 5 & 3 \\ 7 & 8 & 12 & 13 & 12 & 8 & 5 \\ 8 & 12 & 12 & 15 & 12 & 12 & 5 \\ 5 & 13 & 15 & 12 & 13 & 12 & 8 \\ 5 & 12 & 13 & 13 & 10 & 12 & 5 \\ 5 & 8 & 13 & 12 & 12 & 8 & 7 \\ 3 & 5 & 5 & 8 & 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$

   Déterminer, en justifiant, le nombre de chemins de longueur 3 reliant A à F puis donner leur liste.
3. Pour sa campagne électorale, un candidat souhaite parcourir toutes les voies d'accès principales de ce quartier sans emprunter plusieurs fois la même voie.

   Montrer qu'un tel parcours est possible.
4. Dans le graphe ci-dessous, les valeurs indiquent, en minutes, les durées moyennes des trajets entre les différents lieux via les transports en commun.



   Ce même candidat se trouve à la mairie (A) quand on lui rappelle qu'il a un rendez-vous avec le responsable de l'hôpital situé en zone G.

   (a) En utilisant l'algorithme de Dijkstra, déterminer le chemin de durée minimale que ce candidat devra emprunter pour arriver à son rendez-vous.

   (b) Combien de temps faut-il prévoir pour effectuer ce trajet ?

20. Polynésie 7 juin 2013

Les parties A et B sont indépendantes

Alors qu'une entreprise A possédait le monopole de l'accès à internet des particuliers, une entreprise concurrente B est autorisée à s'implanter.
Lors de l'ouverture au public en 2010 des services du fournisseur d'accès B, l'entreprise A possédait 90 % du marché et l'entreprise B possède le reste du marché.
Dans cet exercice, on suppose que chaque année, chaque internaute est client d'une seule entreprise A ou B.
On observe à partir de 2010 que chaque année, 15 % des clients de l'entreprise A deviennent des clients de l'entreprise B et 10 % des clients de l'entreprise B deviennent des clients de l'entreprise A.
Pour tout entier naturel n, on note a_n la probabilité qu'un internaute de ce pays, choisi au hasard, ait son accès à internet fourni par l'entreprise A pour l'année $2010+n$ et b_n la probabilité pour que son fournisseur d'accès en $2010 + n$ soit l'entreprise B.
On note $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice correspondant à l'état probabiliste de l'année $2010+n$ et on a ainsi $a_0 = 0{,}9$ et $b_0 = 0{,}1$.

Partie A

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste.
2. (a) Déterminer la matrice de transition M de ce graphe.
   (b) Montrer qu'en 2013, l'état probabiliste en environ $\begin{pmatrix} 0{,}61 & 0{,}39 \end{pmatrix}$.
   (c) Déterminer l'état stable $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ de la répartition des clients des entreprises A et B. Interpréter le résultat.

Partie B

Lors d'une campagne de marketing, l'entreprise B distribue un stylo ou un porte-clé ; il en coûte à l'entreprise 0,80 € par stylo et 1,20 € par porte-clé distribué.
À la fin de la journée, l'entreprise a distribué 550 objets et cela lui a coûté 540 €.

On cherche le nombre s de stylos et le nombre c de porte-clés distribués.

1. Écrire un système traduisant cette situation.
2. Montrer que le système précédent est équivalent à $R \times X = T$
   où $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0{,}8 & 1{,}2 \end{pmatrix}$ et X et T sont des matrices que l'on précisera.
3. Résoudre le système à l'aide de la calculatrice. Interpréter le résultat.

21. Amérique du Nord 30 mai 2013

Léa est inscrite sur les réseaux sociaux et consulte régulièrement sa page.

On considère que :

- Si Léa s'est connectée un certain jour, la probabilité qu'elle se connecte le lendemain est égale à 0,9.
- Si Léa ne s'est pas connectée un certain jour, la probabilité qu'elle se connecte le lendemain est égale à 0,8.

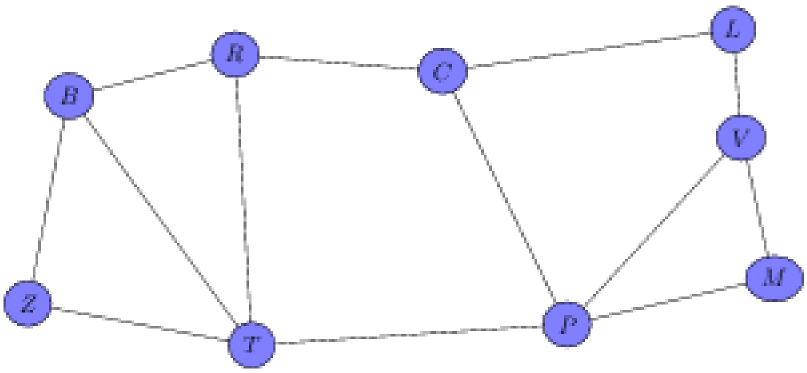
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note a_n la probabilité que Léa se connecte le n-ième jour et b_n la probabilité qu'elle ne se connecte pas le n-ième jour.
On a donc : $a_n + b_n = 1$.

Le 1er jour, Léa ne s'est pas connectée, on a donc $a_1 = 0$.

1. (a) Traduire les données par un graphe probabiliste.
   (b) Préciser la matrice M de transition associée à ce graphe.
   (c) Déterminer la probabilité que Léa se connecte le troisième jour.
2. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $a_{n+1} = 0{,}1a_n + 0{,}8$.
3. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier $n \geqslant 1$, par $u_n n = a_n - \dfrac{8}{9}$.
   (a) Montrer que (u_n) est une suite géométrique, préciser sa raison et son premier terme.
   (b) Exprimer u_n puis a_n en fonction de n.
4. (a) Déterminer en justifiant la limite de (a_n).
   (b) Interpréter ce résultat.

22. Liban 28 mai 2013

Le graphe ci-dessous représente les autoroutes entre les principales villes du Sud de la France :
Bordeaux (B), Clermont-Ferrand (C), Lyon (L), Marseille (M), Montpellier (P), Brive (R), Toulouse (T), Valence (V) et Biarritz (Z).

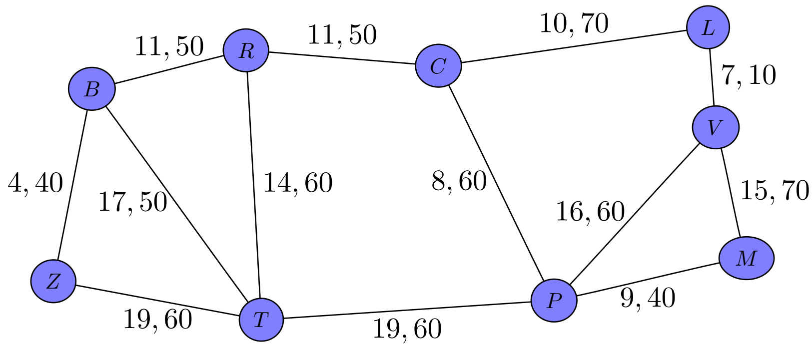


Pour cette question, on justifiera chaque réponse.

1. (a) Déterminer l'ordre du graphe.
   (b) Déterminer si le graphe est connexe.
   (c) Déterminer si le graphe est complet.
2. Un touriste atterrit à l'aéroport de Lyon et loue une voiture.
   Déterminer, en justifiant, s'il pourra visiter toutes les villes en empruntant une et une seule fois chaque autoroute.
3. Il décide finalement d'aller seulement de Lyon à Biarritz.
   On note N la matrice associée au graphe, les sommets étant rangés dans l'ordre alphabétique : B, C, L, M, P, R, T, V, Z.
   Voici les matrices N et N^3 :

$$N = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&1&1&0&1\\ 0&0&1&0&1&1&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&0&1&1&0\\ 1&1&0&0&0&0&1&0&0\\ 1&0&0&0&1&1&0&0&1\\ 0&0&1&1&1&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&1&0&0 \end{pmatrix} \quad \text{et } N^3 = \begin{pmatrix} 4&2&1&1&3&6&6&1&5\\ 2&0&5&2&8&6&1&1&3\\ 1&5&0&2&1&0&3&5&0\\ 1&2&2&2&5&2&1&4&1\\ 3&8&1&5&2&1&8&7&1\\ 6&6&0&2&1&2&8&3&2\\ 6&1&3&1&8&8&4&1&6\\ 1&1&5&4&7&3&1&2&1\\ 5&3&0&1&1&2&6&1&2 \end{pmatrix}$$

   (a) En détaillant le calcul, déterminer le coefficient de la troisième ligne et dernière colonne de la matrice N^4.
   (b) En donner une interprétation.
4. Sur les arêtes du graphe sont maintenant indiqués les prix des péages en euro.



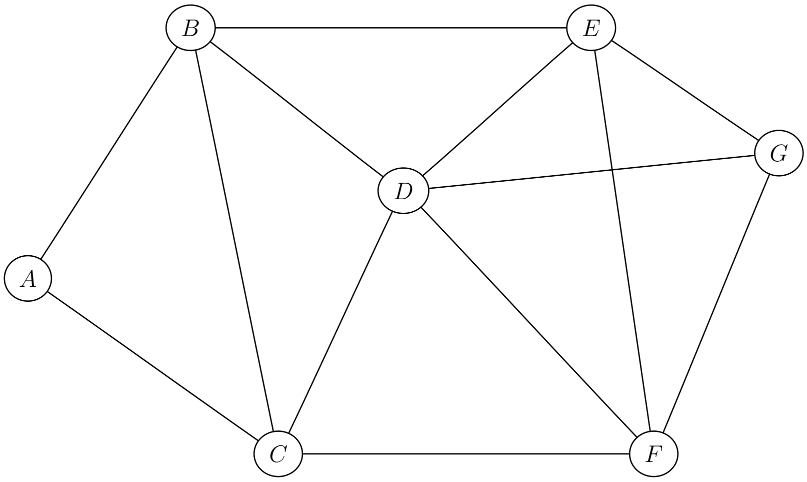
(a) À l'aide de l'algorithme de Dijkstra, déterminer le chemin que doit prendre le touriste pour minimiser le coût des péages de Lyon à Biarritz.

(b) Déterminer le coût, en euro, de ce trajet.

23. Pondichéry 15 avril 2013

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment

On considère le graphe Γ ci-dessous :

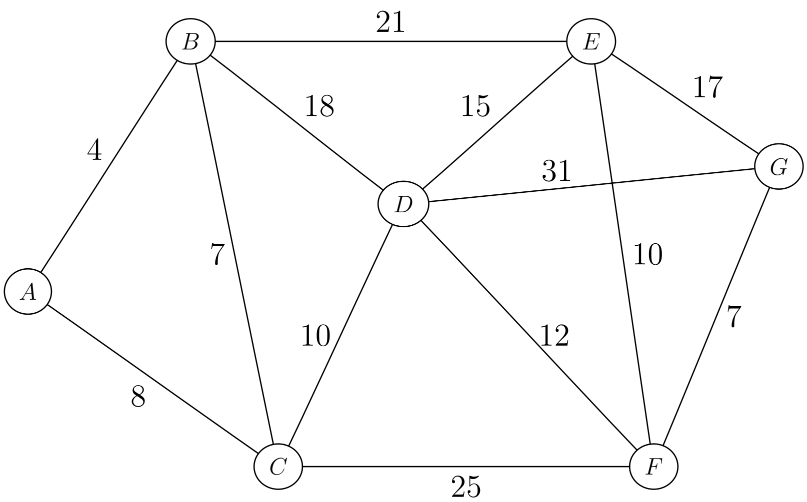


PARTIE A

1. Ce graphe admet-il une chaîne eulérienne ? Justifier la réponse. Si oui donner une telle chaîne.
2. Ce graphe admet-il un cycle eulérien ? Justifier la réponse. Si oui donner un tel cycle.
3. Donner la matrice M associée au graphe Γ. Les sommets seront pris dans l'ordre alphabétique : A, B, C, D, E, F,G.

PARTIE B

Une région est munie d'un réseau de trains, représenté par le graphe Γ ci-dessous.
Les stations sont symbolisées par les sommets A, B, C, D, E, F et G. Chaque arête représente une ligne reliant deux gares. Les temps de parcours (correspondance comprise) en minutes entre chaque sommet ont été rajoutés sur le graphe.



1. Déterminer le plus court chemin en minutes, reliant la gare B à la gare G.
   Justifier la réponse grâce à un algorithme.
2. Quelle est la longueur en minutes de ce chemin ?

Table des matières

Index