

⌘ Baccalauréat S Algorithmes ⌘

Index des exercices contenant un algorithme de juin 2012 à novembre 2013

Tapuscrit : DENIS VERGÈS

N°	Lieu et date			
1	Polynésie juin 2012			
2	Métropole juin 2012			
3	Centres étrangers juin 2012			
4	Asie juin 2012			
5	Antilles–Guyane 2012			
6	Antilles–Guyane (spécialité) 2012			
7	Liban mai 2012			
8	Amérique du Nord mai 2012			
9	Pondichéry avril 2012			
10	Pondichéry avril 2013			
11	Amérique du Nord mai 2013			
12	Liban mai 2013			
13	Antilles–Guyane juin 2013			
14	Centres étrangers juin 2013			
15	Asie juin 2013			
16	Métropole juin 2013			
17	Antilles–Guyane septembre 2013			
18	Antilles–Guyane septembre (spécialité 2013			
19	Métropole septembre 2013			
20	Nouvelle-Calédonie novembre 2013			

1 Polynésie juin 2012

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

Les variables sont le réel U et les entiers naturels k et N .

Entrée Saisir le nombre entier naturel non nul N .
Traitement Affecter à U la valeur 0 Pour k allant de 0 à $N - 1$ Affecter à U la valeur $3U - 2k + 3$ Fin pour
Sortie Afficher U

Quel est l'affichage en sortie lorsque $N = 3$?

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$.

- Calculer u_1 et u_2 .
- Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \geq n$.
 - En déduire la limite de la suite (u_n) .
- Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
- Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = u_n - n + 1$.
 - Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
 - En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = 3^n + n - 1$.
- Soit p un entier naturel non nul.
 - Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe au moins un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq 10^p$?
On s'intéresse maintenant au plus petit entier n_0 .
 - Justifier que $n_0 \leq 3p$.
 - Déterminer à l'aide de la calculatrice cet entier n_0 pour la valeur $p = 3$.
 - Proposer un algorithme qui, pour une valeur de p donnée en entrée, affiche en sortie la valeur du plus petit entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on ait $u_n \geq 10^p$.

2 Métropole juin 2012

Il est possible de traiter la partie C sans avoir traité la partie B.

Partie A

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right).$$

- Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
- Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[1 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{x(x+1)^2}$.
Dresser le tableau de variation de la fonction f .
- En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier strictement positif par

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

- On considère l'algorithme suivant :

Variables :	i et n sont des entiers naturels. u est un réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de n .
Initialisation :	Affecter à u la valeur 0.
Traitement :	Pour i variant de 1 à n . Affecter à u la valeur $u + \frac{1}{i}$
Sortie :	Afficher u .

Donner la valeur exacte affichée par cet algorithme lorsque l'utilisateur entre la valeur $n = 3$.

- Recopier et compléter l'algorithme précédent afin qu'il affiche la valeur de u_n lorsque l'utilisateur entre la valeur de n .
- Voici les résultats fournis par l'algorithme modifié, arrondis à 10^{-3} .

n	4	5	6	7	8	9	10	100	1 000	1 500	2 000
u_n	0,697	0,674	0,658	0,647	0,638	0,632	0,626	0,582	0,578	0,578	0,577

À l'aide de ce tableau, formuler des conjectures sur le sens de variation de la suite (u_n) et son éventuelle convergence.

Partie C

Cette partie peut être traitée indépendamment de la partie B.

Elle permet de démontrer les conjectures formulées à propos de la suite (u_n) telle que pour tout entier strictement positif n ,

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

- 1.** Démontrer que pour tout entier strictement positif n ,

$$u_{n+1} - u_n = f(n)$$

où f est la fonction définie dans la partie A.

En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

- 2.** 1. Soit k un entier strictement positif.

Justifier l'inégalité $\int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x} \right) dx \geq 0$.

En déduire que $\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}$.

Démontrer l'inégalité $\ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$ (1).

2. Écrire l'inégalité (1) en remplaçant successivement k par $1, 2, \dots, n$ et démontrer que pour tout entier strictement positif n ,

$$\ln(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

3. En déduire que pour tout entier strictement positif n , $u_n \geq 0$.

- 3.** Prouver que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas de calculer sa limite.

3 Centres étrangers juin 2012

On considère la suite (I_n) définie pour n entier naturel non nul par :

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{x^2} dx.$$

1. Soit g la fonction définie par $g(x) = xe^{x^2}$.
Démontrer que la fonction G définie sur \mathbb{R} par $G(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$ est une primitive sur \mathbb{R} de la fonction g .
2. En déduire la valeur de I_1 .
3. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que, pour tout entier naturel n , supérieur ou égal à 1, on a :

$$I_{n+2} = \frac{1}{2}e - \frac{n+1}{2}I_n.$$

4. Calculer I_3 et I_5 .

2. On considère l'algorithme suivant :

Initialisation	Affecter à n la valeur 1 Affecter à u la valeur $\frac{1}{2}e - \frac{1}{2}$
	Tant que $n < 21$ Affecter à u la valeur $\frac{1}{2}e - \frac{n+1}{2}u$ Affecter à n la valeur $n+2$
Sortie	Afficher u

Quel terme de la suite (I_n) obtient-on en sortie de cet algorithme ?

3.
 1. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n , $I_n \geq 0$.
 2. Montrer que la suite (I_n) est décroissante.
 3. En déduire que la suite (I_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
4. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Déterminer la valeur de ℓ .

4 Asie juin 2012

1. On considère l'algorithme suivant :

Entrée	Saisir un réel strictement positif non nul a Saisir un réel strictement positif non nul b ($b > a$) Saisir un entier naturel non nul N
Initialisation	Affecter à u la valeur a Affecter à v la valeur b Affecter à n la valeur 0
Traitement	TANT QUE $n < N$ Affecter à n la valeur $n + 1$ Affecter à u la valeur $\frac{a+b}{2}$ Affecter à v la valeur $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$ Affecter à a la valeur u Affecter à b la valeur v
Sortie	Afficher u , afficher v

Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $a = 4$, $b = 9$ et $N = 2$. Les valeurs successives de u et v seront arrondies au millième.

n	a	b	u	v
0	4	9		
1				
2				

Dans la suite, a et b sont deux réels tels que $0 < a < b$.

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$u_0 = a$, $v_0 = b$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2 + v_n^2}{2}}$$

2.
 1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n > 0$ et $v_n > 0$.
 2. Démontrer que, pour tout entier naturel n : $v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = \left(\frac{u_n - v_n}{2}\right)^2$.
En déduire que, pour tout entier naturel n , on a $u_n \leq v_n$.
3.
 1. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
 2. Comparer v_{n+1}^2 et v_n^2 . En déduire le sens de variation de la suite (v_n) .
4. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

5 Antilles-Guyane juin 2012

Les cinq questions sont indépendantes.

1. Dans un lycée donné, on sait que 55 % des élèves sont des filles. On sait également que 35 % des filles et 30 % des garçons déjeunent à la cantine.
On choisit, au hasard, un élève du lycée.
Quelle est la probabilité que cet élève ne déjeune pas à la cantine ?
2. Une urne contient 10 jetons numérotés de 1 à 10, indiscernables au toucher. On tire 3 jetons simultanément.
Combien de tirages différents peut-on faire contenant au moins un jeton à numéro pair ? 3.
3. Une variable aléatoire Y suit une loi binomiale de paramètres 20 et $\frac{1}{5}$.
Calculer la probabilité que Y soit supérieure ou égale à 2. Donner une valeur approchée du résultat à 10^{-3} .
4. Un appareil ménager peut présenter après sa fabrication deux défauts.
On appelle A l'évènement « l'appareil présente un défaut d'apparence » et F l'évènement « l'appareil présente un défaut de fonctionnement ».
On suppose que les évènements A et F sont indépendants.
On sait que la probabilité que l'appareil présente un défaut d'apparence est égale à 0,02 et que la probabilité que l'appareil présente au moins l'un des deux défauts est égale à 0,069.
On choisit au hasard un des appareils. Quelle est la probabilité que l'appareil présente le défaut F ?
5. On considère l'algorithme :

```

A et C sont des entiers naturels,
C prend la valeur 0
Répéter 9 fois
    A prend une valeur aléatoire entière entre 1 et 7.
    Si A > 5 alors C prend la valeur de C + 1
    Fin Si
Fin répéter
Afficher C.
  
```

Dans l'expérience aléatoire simulée par l'algorithme précédent, on appelle X la variable aléatoire prenant la valeur C affichée.

Quelle loi suit la variable X ? Préciser ses paramètres.

6 Antilles-Guyane (spécialité) juin 2012

Les quatre questions sont indépendantes.

1. 1. Vérifier que le couple $(4; 6)$ est une solution de l'équation

$$(E) \quad 11x - 5y = 14.$$

2. Déterminer tous les couples d'entiers relatifs $(x; y)$ vérifiant l'équation (E).

2. 1. Démontrer que, pour tout entier naturel n ,

$$2^{3n} \equiv 1 \pmod{7}.$$

2. Déterminer le reste de la division euclidienne de 2011^{2012} par 7.

3. On se place dans le plan complexe. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{3}{2}(1 - i)z + 4 - 2i.$$

4.

5. On considère l'algorithme suivant où $\text{Ent}\left(\frac{A}{N}\right)$ désigne la partie entière de $\frac{A}{N}$.

```

A et N sont des entiers naturels
Saisir A
N prend la valeur 1
Tant que  $N \leq \sqrt{A}$ 
    Si  $\frac{A}{N} - \text{Ent}\left(\frac{A}{N}\right) = 0$  alors Afficher N et  $\frac{A}{N}$ 
    Fin si
N prend la valeur N + 1
Fin Tant que.
```

Quels résultats affiche cet algorithme pour $A = 12$?

Que donne cet algorithme dans le cas général ?

7 Pondichéry avril 2012

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

Un groupe de 50 coureurs, portant des dossards numérotés de 1 à 50, participe à une course cycliste qui comprend 10 étapes, et au cours de laquelle aucun abandon n'est constaté.

À la fin de chaque étape, un groupe de 5 coureurs est choisi au hasard pour subir un contrôle antidopage. Ces désignations de 5 coureurs à l'issue de chacune des étapes sont indépendantes. Un même coureur peut donc être contrôlé à l'issue de plusieurs étapes.

1. À l'issue de chaque étape, combien peut-on former de groupes différents de 5 coureurs ?
2. On considère l'algorithme ci-dessous dans lequel :
 - « $\text{rand}(1, 50)$ » permet d'obtenir un nombre entier aléatoire appartenant à l'intervalle $[1 ; 50]$
 - l'écriture « $x := y$ » désigne l'affectation d'une valeur y à une variable x .

Variables	a, b, c, d, e sont des variables du type entier
Initialisation	$a := 0 ; b := 0 ; c := 0 ; d := 0 ; e := 0$
Traitement	Tant que $(a = b)$ ou $(a = c)$ ou $(a = d)$ ou $(a = e)$ ou $(b = c)$ ou $(b = d)$ ou $(b = e)$ ou $(c = d)$ ou $(c = e)$ ou $(d = e)$ Début du tant que $a := \text{rand}(1, 50) ; b := \text{rand}(1, 50) ;$ $c := \text{rand}(1, 50) ; d := \text{rand}(1, 50) ;$ $e := \text{rand}(1, 50)$ Fin du tant que
Sortie	Afficher a, b, c, d, e

1. Parmi les ensembles de nombres suivants, lesquels ont pu être obtenus avec cet algorithme :
 $L_1 = \{2 ; 11 ; 44 ; 2 ; 15\} ; L_2 = \{8, 17, 41, 34, 6\} ;$
 $L_3 = \{12, 17, 23, 17, 50\} ; L_4 = \{45, 19, 43, 21, 18\} ?$
2. Que permet de réaliser cet algorithme concernant la course cycliste ?
3. À l'issue d'une étape, on choisit au hasard un coureur parmi les 50 participants. Établir que la probabilité pour qu'il subisse le contrôle prévu pour cette étape est égale à 0,1.
4. On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de contrôles subis par un coureur sur l'ensemble des 10 étapes de la course.
 1. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X ? Préciser ses paramètres.
 2. On choisit au hasard un coureur à l'arrivée de la course. Calculer, sous forme décimale arrondie au dix-millième, les probabilités des événements suivants :
 - il a été contrôlé 5 fois exactement ;
 - il n'a pas été contrôlé ;
 - il a été contrôlé au moins une fois.

Partie B

Dans cette partie, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.

Pour un coureur choisi au hasard dans l'ensemble des 50 coureurs, on appelle T l'évènement : « le contrôle est positif », et d'après des statistiques, on admet que $P(T) = 0,05$.

On appelle D l'évènement : « le coureur est dopé ».

Le contrôle anti-dopage n'étant pas fiable à 100 %, on sait que :

- si un coureur est dopé, le contrôle est positif dans 97 % des cas ;
- si un coureur n'est pas dopé, le contrôle est positif dans 1 % des cas.

- 1.** Calculer $P(D)$.
- 2.** Un coureur a un contrôle positif. Quelle est la probabilité qu'il ne soit pas dopé ?

8 Pondichéry avril 2013

EXERCICE 4

6 points

Commun à tous les candidats

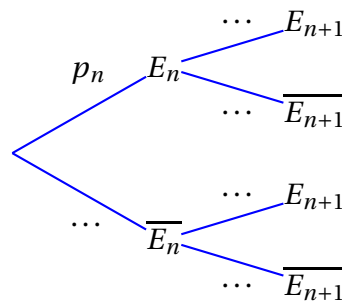
Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.

- Un salarié malade est absent
- La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.
- Si la semaine n le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine $n + 1$ avec une probabilité égale à $0,04$.
- Si la semaine n le salarié est malade, il reste malade la semaine $n + 1$ avec une probabilité égale à $0,24$.

On désigne, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 , par E_n l'évènement « le salarié est absent pour cause de maladie la n -ième semaine ». On note p_n la probabilité de l'évènement E_n .

On a ainsi : $p_1 = 0$ et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : $0 \leq p_n < 1$.

1. Déterminer la valeur de p_3 à l'aide d'un arbre de probabilité.
- Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.
1. Recopier sur la copie et compléter l'arbre de probabilité donné ci-dessous



2. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 ,
 $p_{n+1} = 0,2p_n + 0,04$.
3. Montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 par $u_n = p_n - 0,05$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison r .
 En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n et r .
4. En déduire la limite de la suite (p_n) .
5. On admet dans cette question que la suite (p_n) est croissante. On considère l'algorithme suivant :

Variables	K et J sont des entiers naturels, P est un nombre réel
Initialisation	P prend la valeur 0 J prend la valeur 1
Entrée	Saisir la valeur de K
Traitement	Tant que $P < 0,05 - 10^{-K}$ P prend la valeur $0,2 \times P + 0,04$ J prend la valeur $J + 1$ Fin tant que
Sortie	Afficher J

À quoi correspond l'affichage final J ?

Pourquoi est-on sûr que cet algorithme s'arrête ?

3. Cette entreprise emploie 220 salariés. Pour la suite on admet que la probabilité pour qu'un salarié soit malade une semaine donnée durant cette période d'épidémie est égale à $p = 0,05$.
On suppose que l'état de santé d'un salarié ne dépend pas de l'état de santé de ses collègues.
On désigne par X la variable aléatoire qui donne le nombre de salariés malades une semaine donnée.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
Calculer l'espérance mathématique μ et l'écart type σ de la variable aléatoire X .

2. On admet que l'on peut approcher la loi de la variable aléatoire $\frac{X - \mu}{\sigma}$ par la loi normale centrée réduite c'est-à-dire de paramètres 0 et 1.

On note Z une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

Le tableau suivant donne les probabilités de l'évènement $Z < x$ pour quelques valeurs du nombre réel x .

x	-1,55	-1,24	-0,93	-0,62	-0,31	0,00	0,31	0,62	0,93	1,24	1,55
$P(Z < x)$	0,061	0,108	0,177	0,268	0,379	0,500	0,621	0,732	0,823	0,892	0,939

Calculer, au moyen de l'approximation proposée en question b., une valeur approchée à 10^{-2} près de la probabilité de l'évènement : « le nombre de salariés absents dans l'entreprise au cours d'une semaine donnée est supérieur ou égal à 7 et inférieur ou égal à 15 ».

9 Amérique du Nord mai 2013

Exercice 2

5 points

Candidats N'AYANT PAS SUIVI l'enseignement de spécialité mathématiques

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \sqrt{2u_n}.$$

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n est un entier naturel u est un réel positif
Initialisation :	Demander la valeur de n Affecter à u la valeur 1
Traitement :	Pour i variant de 1 à n : Affecter à u la valeur $\sqrt{2u}$ Fin de Pour
Sortie :	Afficher u

1. Donner une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat qu'affiche cet algorithme lorsque l'on choisit $n = 3$.
2. Que permet de calculer cet algorithme ?
3. Le tableau ci-dessous donne des valeurs approchées obtenues à l'aide de cet algorithme pour certaines valeurs de n .

n	1	5	10	15	20
Valeur affichée	1,414 2	1,957 1	1,998 6	1,999 9	1,999 9

Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (u_n) ?

2.
 1. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $0 < u_n \leq 2$.
 2. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .
 3. Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.
3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = \ln u_n - \ln 2$.
 1. Démontrer que la suite (v_n) est la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -\ln 2$.
 2. Déterminer, pour tout entier naturel n , l'expression de v_n en fonction de n , puis de u_n en fonction de n .
 3. Déterminer la limite de la suite (u_n) .
 4. Recopier l'algorithme ci-dessous et le compléter par les instructions du traitement et de la sortie, de façon à afficher en sortie la plus petite valeur de n telle que $u_n > 1,999$.

Variables :	n est un entier naturel u est un réel
Initialisation :	Affecter à n la valeur 0 Affecter à u la valeur 1
Traitement :	
Sortie :	

10 Liban mai 2013

EXERCICE 4

5 points

Candidats N'AYANT PAS SUIVI l'enseignement de spécialité

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n par

$$\begin{cases} v_0 &= 1 \\ v_{n+1} &= \frac{9}{6 - v_n} \end{cases}$$

Partie A

1. On souhaite écrire un algorithme affichant, pour un entier naturel n donné, tous les termes de la suite, du rang 0 au rang n .

Parmi les trois algorithmes suivants, un seul convient. Préciser lequel en justifiant la réponse.

Algorithme N° 1	Algorithme N° 2	Algorithme N° 3
Variables : v est un réel i et n sont des entiers naturels Début de l'algorithme : Lire n v prend la valeur 1 Pour i variant de 1 à n faire v prend la valeur $\frac{9}{6 - v}$ Fin pour Afficher v Fin algorithme	Variables : v est un réel i et n sont des entiers naturels Début de l'algorithme : Lire n Pour i variant de 1 à n faire v prend la valeur 1 Afficher v v prend la valeur $\frac{9}{6 - v}$ Fin pour Fin algorithme	Variables : v est un réel i et n sont des entiers naturels Début de l'algorithme : Lire n v prend la valeur 1 Pour i variant de 1 à n faire Afficher v v prend la valeur $\frac{9}{6 - v}$ Fin pour Afficher v Fin algorithme

2. Pour $n = 10$ on obtient l'affichage suivant :

1	1,800	2,143	2,333	2,455	2,538	2,600	2,647	2,684	2,714
---	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Pour $n = 100$, les derniers termes affichés sont :

2,967	2,968	2,968	2,968	2,969	2,969	2,969	2,970	2,970	2,970
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (v_n) ?

3. 1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $0 < v_n < 3$.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} - v_n = \frac{(3 - v_n)^2}{6 - v_n}$.
 La suite (v_n) est-elle monotone ?
3. Démontrer que la suite (v_n) est convergente.

Partie B Recherche de la limite de la suite (v_n)

On considère la suite (w_n) définie pour tout n entier naturel par

$$w_n = \frac{1}{v_n - 3}$$

- 1.** Démontrer que (w_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$
- 2.** En déduire l'expression de (w_n) , puis celle de (v_n) en fonction de n .
- 3.** Déterminer la limite de la suite (v_n) .

11 Antilles-Guyane juin 2013

EXERCICE 4

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite (z_n) à termes complexes définie par : $z_0 = 1 + i$ et, pour tout entier naturel n , par

$$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{3}.$$

Pour tout entier naturel n , on pose : $z_n = a_n + ib_n$, où a_n est la partie réelle de z_n et b_n est la partie imaginaire de z_n .

Le but de cet exercice est d'étudier la convergence des suites (a_n) et (b_n) .

Partie A

1. Donner a_0 et b_0 .
2. Calculer z_1 , puis en déduire que $a_1 = \frac{1+\sqrt{2}}{3}$ et $b_1 = \frac{1}{3}$.
3. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	A et B des nombres réels K et N des nombres entiers
Initialisation :	Affecter à A la valeur 1 Affecter à B la valeur 1
Traitement :	
Entrer la valeur de N	
Pour K variant de 1 à N	
	Affecter à A la valeur $\frac{A + \sqrt{A^2 + B^2}}{3}$
	Affecter à B la valeur $\frac{B}{3}$.
Fin Pour	
Afficher A	

1. On exécute cet algorithme en saisissant $N = 2$. Recopier et compléter le tableau ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme (on arrondira les valeurs calculées à 10^{-4} près).
2. Pour un nombre N donné, à quoi correspond la valeur affichée par l'algorithme par rapport à la situation étudiée dans cet exercice ?

Partie B

1. Pour tout entier naturel n , exprimer z_{n+1} en fonction de a_n et b_n .
En déduire l'expression de a_{n+1} en fonction de a_n et b_n , et l'expression de b_{n+1} en fonction de b_n .
2. Quelle est la nature de la suite (b_n) ? En déduire l'expression de b_n en fonction de n , et déterminer la limite de la suite (b_n) .
3. 1. On rappelle que pour tous nombres complexes z et z' :

$$|z + z'| \leq |z| + |z'| \quad (\text{inégalité triangulaire}).$$

Montrer que pour tout entier naturel n ,

$$|z_{n+1}| \leq \frac{2|z_n|}{3}.$$

2. Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = |z_n|$.

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n ,

$$u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}.$$

En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite que l'on déterminera.

3. Montrer que, pour tout entier naturel n , $|a_n| \leq u_n$.

En déduire que la suite (a_n) converge vers une limite que l'on déterminera.

12 Centres étrangers juin 2012

Exercice 4

5 points

Candidats n'ayant pas choisi la spécialité mathématique

L'objet de cet exercice est l'étude de la suite (u_n) définie par son premier terme $u_1 = \frac{3}{2}$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = \frac{nu_n + 1}{2(n+1)}$.

Partie A - Algorithmique et conjectures

Pour calculer et afficher le terme u_9 de la suite, un élève propose l'algorithme ci-contre. Il a oublié de compléter deux lignes.

Variables	n est un entier naturel u est un réel
Initialisation	Affecter à n la valeur 1 Affecter à u la valeur 1,5
Traitement	Tant que $n < 9$ Affecter à u la valeur ... Affecter à n la valeur ... Fin Tant que
Sortie	Afficher la variable u

1. Recopier et compléter les deux lignes de l'algorithme où figurent des points de suspension.
2. Comment faudrait-il modifier cet algorithme pour qu'il calcule et affiche tous les termes de la suite de u_2 jusqu'à u_9 ?
3. Avec cet algorithme modifié, on a obtenu les résultats suivants, arrondis au dix-millième :

n	1	2	3	4	5	6	...	99	100
u_n	1,5	0,625	0,375	0,2656	0,2063	0,1693	...	0,0102	0,0101

Au vu de ces résultats, conjecturer le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) .

Partie B - Étude mathématique

On définit une suite auxiliaire (v_n) par : pour tout entier $n \geq 1$, $v_n = nu_n - 1$.

1. Montrer que la suite (v_n) est géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.
2. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $u_n = \frac{1 + (0,5)^n}{n}$.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n) .
4. Justifier que, pour tout entier $n \geq 1$, on a : $u_{n+1} - u_n = -\frac{1 + (1 + 0,5n)(0,5)^n}{n(n+1)}$.
En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

Partie C - Retour à l'algorithmique

En s'inspirant de la partie A, écrire un algorithme permettant de déterminer et d'afficher le plus petit entier n tel que $u_n < 0,001$.

13 Asie juin 2012

EXERCICE 4

5 points

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{1 + 3u_n}{3 + u_n}.$$

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n > 1$.
2.
 1. Établir que, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} - u_n = \frac{(1 - u_n)(1 + u_n)}{3 + u_n}$.
 2. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .
En déduire que la suite (u_n) converge.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{1 + 0,5u_n}{0,5 + u_n}.$$

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. On considère l'algorithme suivant :

Entrée	Soit un entier naturel non nul n
Initialisation	Affecter à u la valeur 2
Traitement et sortie	POUR i allant de 1 à n Affecter à u la valeur $\frac{1 + 0,5u}{0,5 + u}$ Afficher u
	FIN POUR

Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $n = 3$. Les valeurs de u seront arrondies au millième.

i	1	2	3
u			

2. Pour $n = 12$, on a prolongé le tableau précédent et on a obtenu :

i	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u	1,0083	0,9973	1,0009	0,9997	1,0001	0,99997	1,00001	0,999996	1,000001

Conjecturer le comportement de la suite (u_n) à l'infini.

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$.
 1. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $-\frac{1}{3}$.
 2. Calculer v_0 puis écrire v_n en fonction de n .
4.
 1. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $v_n \neq 1$.
 2. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n}$.
 3. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

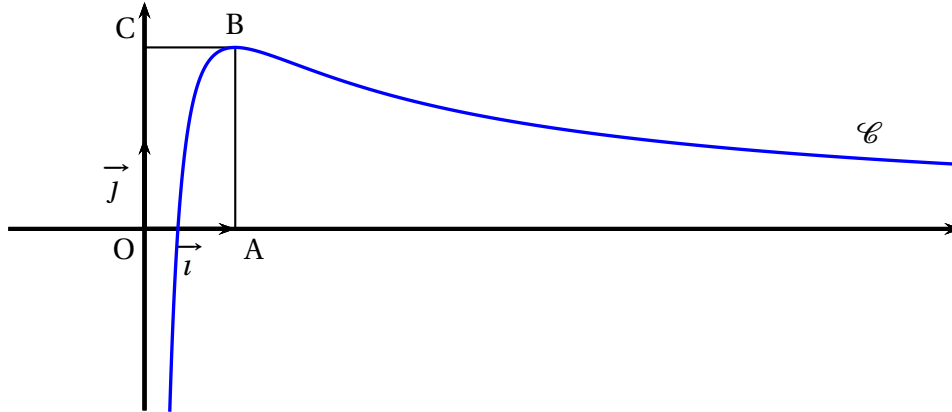
14 Métropole juin 2013

EXERCICE 2

7 points

Commun à tous les candidats

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , la courbe représentative \mathcal{C} d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$.



On dispose des informations suivantes :

- les points A, B, C ont pour coordonnées respectives $(1; 0)$, $(1; 2)$, $(0; 2)$;
- la courbe \mathcal{C} passe par le point B et la droite (BC) est tangente à \mathcal{C} en B ;
- il existe deux réels positifs a et b tels que pour tout réel strictement positif x ,

$$f(x) = \frac{a + b \ln x}{x}.$$

1. 1. En utilisant le graphique, donner les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.
 2. Vérifier que pour tout réel strictement positif x , $f'(x) = \frac{(b-a) - b \ln x}{x^2}$.
 3. En déduire les réels a et b .
2. 1. Justifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$, $f'(x)$ a le même signe que $-\ln x$.
 2. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. On pourra remarquer que pour tout réel x strictement positif, $f(x) = \frac{2}{x} + 2 \frac{\ln x}{x}$.
 3. En déduire le tableau de variations de la fonction f .
3. 1. Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0; 1]$.
 2. Par un raisonnement analogue, on démontre qu'il existe un unique réel β de l'intervalle $]1; +\infty[$ tel que $f(\beta) = 1$.
 Déterminer l'entier n tel que $n < \beta < n + 1$.
4. On donne l'algorithme ci-dessous.

Variables :	a, b et m sont des nombres réels.								
Initialisation :	Affecter à a la valeur 0. Affecter à b la valeur 1.								
Traitement :	Tant que $b - a > 0, 1$ <table border="1" style="margin-left: 20px;"> <tr> <td style="padding: 0 5px;"> </td> <td>Affecter à m la valeur $\frac{1}{2}(a + b)$.</td> </tr> <tr> <td style="padding: 0 5px;"> </td> <td>Si $f(m) < 1$ alors Affecter à a la valeur m.</td> </tr> <tr> <td style="padding: 0 5px;"> </td> <td>Sinon Affecter à b la valeur m.</td> </tr> <tr> <td style="padding: 0 5px;"> </td> <td>Fin de Si.</td> </tr> </table> Fin de Tant que.		Affecter à m la valeur $\frac{1}{2}(a + b)$.		Si $f(m) < 1$ alors Affecter à a la valeur m .		Sinon Affecter à b la valeur m .		Fin de Si.
	Affecter à m la valeur $\frac{1}{2}(a + b)$.								
	Si $f(m) < 1$ alors Affecter à a la valeur m .								
	Sinon Affecter à b la valeur m .								
	Fin de Si.								
Sortie :	Afficher a . Afficher b .								

1. Faire tourner cet algorithme en complétant le tableau ci-dessous que l'on recopiera sur la copie.

	étape 1	étape 2	étape 3	étape 4	étape 5
a	0				
b	1				
$b - a$					
m					

2. Que représentent les valeurs affichées par cet algorithme ?
3. Modifier l'algorithme ci-dessus pour qu'il affiche les deux bornes d'un encadrement de β d'amplitude 10^{-1}
5. Le but de cette question est de démontrer que la courbe \mathcal{C} partage le rectangle OABC en deux domaines d'aires égales.

1. Justifier que cela revient à démontrer que $\int_{\frac{1}{e}}^1 f(x) dx = 1$.

2. En remarquant que l'expression de $f(x)$ peut s'écrire $\frac{2}{x} + 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x$, terminer la démonstration.

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Les deux parties sont indépendantes

Le robot Tom doit emprunter un pont sans garde-corps de 10 pas de long et de 2 pas de large. Sa démarche est très particulière :

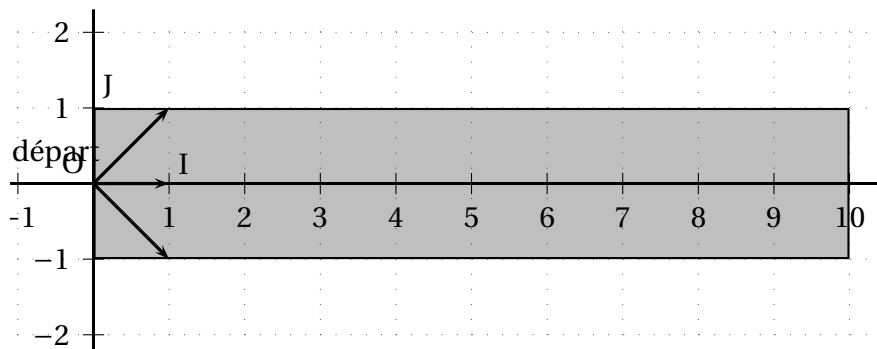
- Soit il avance d'un pas tout droit ;
- Soit il se déplace en diagonale vers la gauche (déplacement équivalent à un pas vers la gauche et un pas tout droit) ;
- Soit il se déplace en diagonale vers la droite (déplacement équivalent à un pas vers la droite et un pas tout droit).

On suppose que ces trois types de déplacement sont aléatoires et équiprobables.

L'objectif de cet exercice est d'estimer la probabilité p de l'évènement S « Tom traverse le pont » c'est-à-dire « Tom n'est pas tombé dans l'eau et se trouve encore sur le pont au bout de 10 déplacements ».

Partie A : modélisation et simulation

On schématise le pont par un rectangle dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) comme l'indique la figure ci-dessous. On suppose que Tom se trouve au point de coordonnées $(0; 0)$ au début de la traversée. On note $(x; y)$ les coordonnées de la position de Tom après x déplacements.



On a écrit l'algorithme suivant qui simule la position de Tom au bout de x déplacements :

```

x, y, n sont des entiers
Affecter à x la valeur 0
Affecter à y la valeur 0
Tant que y ≥ -1 et y ≤ 1 et x ≤ 9
    Affecter à n une valeur choisie au hasard entre -1, 0 et 1
    Affecter à y la valeur y + n
    Affecter à x la valeur x + 1
Fin tant que
Afficher « la position de Tom est » (x ; y)
  
```

1. On donne les couples suivants : $(-1; 1)$; $(10; 0)$; $(2; 4)$; $(10; 2)$.
Lesquels ont pu être obtenus avec cet algorithme ? Justifier la réponse.
2. Modifier cet algorithme pour qu'à la place de « la position de Tom est $(x; y)$ », il affiche finalement « Tom a réussi la traversée » ou « Tom est tombé ».

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

A et X sont des nombres entiers
 Saisir un entier positif A
 Affecter à X la valeur de A
 Tant que X supérieur ou égal à 26
 Affecter à X la valeur X - 26
 Fin du tant que
 Afficher X

1. Qu'affiche cet algorithme quand on saisit le nombre 3?
2. Qu'affiche cet algorithme quand on saisit le nombre 55?
3. Pour un nombre entier saisi quelconque, que représente le résultat fourni par cet algorithme?

Partie B

On veut coder un bloc de deux lettres selon la procédure suivante (détaillée en quatre étapes) :

- **Étape 1** : chaque lettre du bloc est remplacée par un entier en utilisant le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On obtient une matrice colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ où x_1 correspond à la première lettre du mot et x_2 correspond à la deuxième lettre du mot.

- **Étape 2** : $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ est transformé en $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ tel que

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

La matrice $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ est appelée la matrice de codage.

- **Étape 3** : $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ est transformé en $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ tel que

$$\begin{cases} z_1 \equiv y_1 \pmod{26} & \text{avec } 0 \leq z_1 \leq 25 \\ z_2 \equiv y_2 \pmod{26} & \text{avec } 0 \leq z_2 \leq 25 \end{cases}$$

- **Étape 4** : $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ est transformé en un bloc de deux lettres en utilisant le tableau de correspondance donné dans l'étape 1.

Exemple :
 RE \rightarrow $\begin{pmatrix} 17 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 55 \\ 93 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix} \rightarrow$ DP
 Le bloc RE est donc codé en DP

Justifier le passage de $\begin{pmatrix} 17 \\ 4 \end{pmatrix}$ à $\begin{pmatrix} 55 \\ 93 \end{pmatrix}$ puis à $\begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix}$.

- 1.** Soient x_1, x_2, x'_1, x'_2 quatre nombres entiers compris entre 0 et 25 tels que $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$ sont transformés lors du procédé de codage en $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\begin{cases} 3x_1 + x_2 & \equiv 3x'_1 + x'_2 & (26) \\ 5x_1 + 2x_2 & \equiv 5x'_1 + 2x'_2 & (26). \end{cases}$

2. En déduire que $x_1 \equiv x'_1 \pmod{26}$ et $x_2 \equiv x'_2 \pmod{26}$ puis que $x_1 = x'_1$ et $x_2 = x'_2$.

- 2.** On souhaite trouver une méthode de décodage pour le bloc DP :

1. Vérifier que la matrice $C' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ est la matrice inverse de C .

2. Calculer $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ tels que $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix}$.

3. Calculer $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ tels que $\begin{cases} x_1 & \equiv y_1 & (26) \text{ avec } 0 \leq x_1 \leq 25 \\ x_2 & \equiv y_2 & (26) \text{ avec } 0 \leq x_2 \leq 25 \end{cases}$

4. Quel procédé général de décodage peut-on conjecturer ?

- 3.** Dans cette question nous allons généraliser ce procédé de décodage.

On considère un bloc de deux lettres et on appelle z_1 et z_2 les deux entiers compris entre 0 et 25 associés à ces lettres à l'étape 3. On cherche à trouver deux entiers x_1 et x_2 compris entre 0 et 25 qui donnent la matrice colonne $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ par les étapes 2 et 3 du procédé de codage.

Soient y'_1 et y'_2 tels que $\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = C' \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ où $C' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

Soient x_1 et x_2 , les nombres entiers tels que $\begin{cases} x_1 & \equiv y'_1 & (26) \text{ avec } 0 \leq x_1 \leq 25 \\ x_2 & \equiv y'_2 & (26) \text{ avec } 0 \leq x_2 \leq 25 \end{cases}$

Montrer que $\begin{cases} 3x_1 + x_2 & \equiv z_1 & (26) \\ 5x_1 + 2x_2 & \equiv z_2 & (26). \end{cases}$

Conclure.

- 4.** Décoder QC.

Partie B

Dans cette partie, on admet que la fonction f évoquée dans la **partie A** est la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = (x+2)e^{\frac{1}{2}x}.$$

1. L'observation de la courbe \mathcal{C} permet de conjecturer que la fonction f admet un minimum.

1. Démontrer que pour tout réel x , $f'(x) = \frac{1}{2}(x+4)e^{\frac{1}{2}x}$.
2. En déduire une validation de la conjecture précédente.

2. On pose $I = \int_0^1 f(x) dx$.

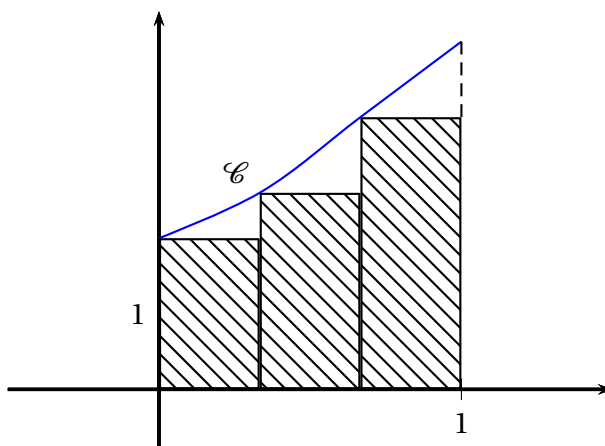
1. Interpréter géométriquement le réel I .
2. Soient u et v les fonctions définies sur \mathbb{R} par $u(x) = x$ et $v(x) = e^{\frac{1}{2}x}$.
Vérifier que $f = 2(u'v + uv')$.
3. En déduire la valeur exacte de l'intégrale I .

3. On donne l'algorithme ci-dessous.

Variables :	k et n sont des nombres entiers naturels. s est un nombre réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de n .
Initialisation :	Affecter à s la valeur 0.
Traitement :	Pour k allant de 0 à $n-1$ Affecter à s la valeur $s + \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$. Fin de boucle.
Sortie :	Afficher s .

On note s_n le nombre affiché par cet algorithme lorsque l'utilisateur entre un entier naturel strictement positif comme valeur de n .

1. Justifier que s_3 représente l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine hachuré sur le graphique ci-dessous où les trois rectangles ont la même largeur.



2. Que dire de la valeur de s_n fournie par l'algorithme proposé lorsque n devient grand ?

Commun à tous les candidats

Soient deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 2$ et $v_0 = 10$ et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}.$$

PARTIE A

On considère l'algorithme suivant :

Variables : N est un entier
 U, V, W sont des réels
 K est un entier

Début : Affecter 0 à K
 Affecter 2 à U
 Affecter 10 à V
 Saisir N
 Tant que $K < N$
 Affecter $K + 1$ à K
 Affecter U à W
 Affecter $\frac{2U + V}{3}$ à U
 Affecter $\frac{W + 3V}{4}$ à V
 Fin tant que
 Afficher U
 Afficher V

Fin

On exécute cet algorithme en saisissant $N = 2$. Recopier et compléter le tableau donné ci-dessous donnant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme.

K	W	U	V
0	gristab		
1			
2			