

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat Métropole 16 juin 2017 ∞
STI2D–STL spécialité SPCL

EXERCICE 1

6 points

La climatisation d'un véhicule automobile est un système qui a une double fonction, refroidir ou réchauffer l'habitacle. Ce système fonctionne grâce à une certaine masse de gaz réfrigérant stocké dans un réservoir.

On suppose que, par défaut d'étanchéité, le système perd naturellement 0,1 gramme de ce gaz chaque jour.

Un automobiliste possède un véhicule pour lequel la masse de gaz dans le réservoir est initialement de 660 grammes.

Partie A

Le constructeur préconise de recharger le réservoir lorsque la masse de gaz est inférieure à 440 grammes. Au bout de combien de jours le constructeur préconise-t-il à l'automobiliste de recharger ce réservoir ?

Partie B

Lors d'une visite d'entretien, le garagiste signale à l'automobiliste que le système de climatisation de son véhicule présente une baisse significative de masse de gaz : en plus de la perte naturelle de 0,1 gramme, le système perd 1 % de sa masse de gaz chaque jour.

Le garagiste recharge alors complètement le réservoir.

Pour tout entier naturel n , on note u_n la masse de gaz dans le réservoir au bout de n jours après cette visite.

On a donc $u_0 = 660$ et on admet que pour tout entier naturel n , on a :

$$u_{n+1} = 0,99u_n - 0,1.$$

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. Voici un algorithme qui, lorsque l'on saisit un nombre N non nul de jours écoulés, calcule et affiche la masse de gaz restant dans le système.

Variables N : un nombre entier naturel k : un nombre entier naturel u : un nombre réel
Entrée Saisir N
Initialisation u prend la valeur 660
Traitement Pour k allant de 1 à ... u prend la valeur ... Fin Pour
Sortie Afficher u

- a. Recopier et compléter la partie relative au **traitement** de cet algorithme.
- b. Quelle masse de gaz restera-t-il au bout de 20 jours ? Arrondir au gramme près.

3. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n + 10$.
 - a. Calculer v_0 .
 - b. On admet que (v_n) est une suite géométrique de raison 0,99.
Pour tout entier naturel n , exprimer v_n en fonction de n .
 - c. En déduire que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n = 670 \times 0,99^n - 10$.
 - d. À l'aide de cette expression, vérifier le résultat obtenu à la **question 2.b**.
4. On rappelle que le constructeur préconise de recharger le réservoir au plus tard lorsque la masse de gaz est inférieure à 440 g.
Le coût d'une recharge est de 80 euros. Le garagiste propose de réparer le système pour 400 euros.
Pourquoi est-il plus économique pour cet automobiliste de réparer le système? Justifier la réponse.

EXERCICE 2

5 points

La fonte GS (graphite sphéroïdal) possède des caractéristiques mécaniques élevées et proches de celles des aciers. Une entreprise fabrique des pièces de fonte GS qui sont utilisées dans l'industrie automobile.

Ces pièces sont coulées dans des moules de sable et ont une température de 1400 ° C à la sortie du four. Elles sont entreposées dans un local dont la température ambiante est maintenue à une température de 30° C. Ces pièces peuvent être démoulées dès lors que leur température est inférieure à 650° C.

La température en degrés Celsius d'une pièce de fonte est une fonction du temps t , exprimé en heures, depuis sa sortie du four. On admet que cette fonction f , définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, est une solution sur cet intervalle de l'équation différentielle $y' + 0,065y = 1,95$.

1. a. Résoudre sur $[0 ; +\infty[$ l'équation différentielle

$$y' + 0,065y = 1,95.$$

- b. Donner $f(0)$ et vérifier que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $f(t) = 1370e^{-0,065t} + 30$.
2. a. Étudier mathématiquement le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
 - b. Pourquoi ce résultat était-il prévisible?
3. La pièce de fonte peut-elle être démoulée après avoir été entreposée 5 heures dans le local?
4. a. Déterminer au bout de combien de temps au minimum la pièce pourra être démoulée. Arrondir le résultat à la minute près.
 - b. Pour éviter la fragilisation de la fonte, il est préférable de ne pas démouler la pièce avant que sa température ait atteint 325° C.
Dans ce cas, faudra-t-il attendre exactement deux fois plus de temps que pour un démoulage à 650° C? Justifier la réponse.

EXERCICE 3

4 points

Un chef cuisinier décide d'ajouter un « menu terroir » à la carte de son restaurant. S'appuyant sur sa longue expérience, le restaurateur pense qu'environ 30 % des clients choisiront ce menu. Ceci le conduit à faire l'hypothèse que la probabilité qu'un client, pris au hasard, commande le « menu terroir » est $p = 0,3$.

Partie A

Afin de tester la validité de son hypothèse, le restaurateur choisit au hasard 100 clients et observe que 26 d'entre eux ont commandé un « menu terroir ».

Après discussion avec son comptable, le restaurateur décide d'accepter l'hypothèse que $p = 0,3$.

À l'aide d'un intervalle de fluctuation asymptotique à 95 %, justifier cette décision.

Partie B

Une agence de voyage a réservé toutes les tables du restaurant pour la semaine à venir. Le restaurateur sait ainsi que 1000 clients viendront déjeuner chacun une fois durant la semaine. Le nombre de « menus terroir » qui seront alors commandés est une variable aléatoire X .

On considère que la probabilité qu'un des clients commande un « menu terroir » est $p = 0,3$.

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.
 - a. Donner ses paramètres.
 - b. Déterminer la probabilité que le nombre de « menu terroir » commandés soit inférieur ou égal à 315.
2. On décide d'approcher la loi binomiale précédente par la loi normale d'espérance $\mu = 300$ et d'écart type $\sigma = 14,49$.
Justifier les valeurs de μ et σ .
Dans la suite de l'exercice, on utilisera cette approximation par la loi normale. Les résultats seront arrondis à 10^{-2} près.
3.
 - a. Estimer $P(285 \leq X \leq 315)$.
 - b. Estimer $P(X \geq 350)$ et interpréter le résultat obtenu.

EXERCICE 4

5 points

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie. Toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. **Proposition 1 :** Le nombre complexe z de module $4\sqrt{3}$ et dont un argument est $\frac{2\pi}{3}$ a pour forme algébrique $-2\sqrt{3} + 6i$.
2. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . Les points A, B et C ont pour affixes respectives :

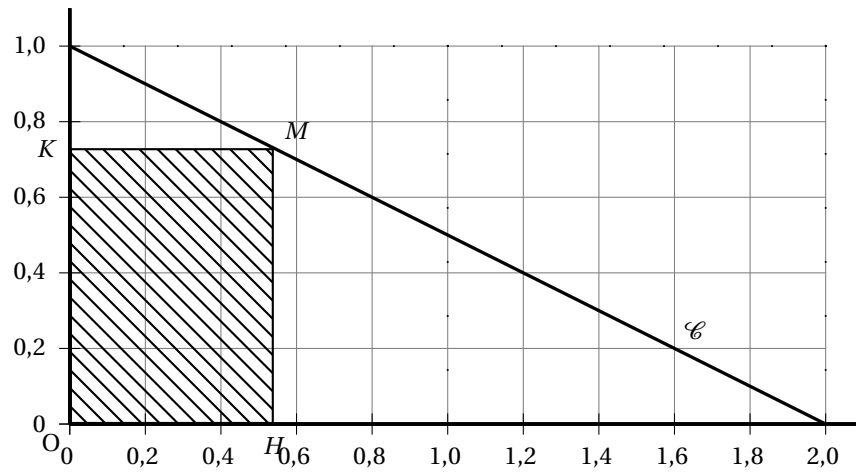
$$z_A = 2e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad z_B = -1 + i\sqrt{3} \quad \text{et} \quad z_C = z_A \times z_B.$$

Proposition 2 : Le point C appartient au cercle de centre O et de rayon 4.

3. On a tracé, ci-dessous dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) la courbe représentative \mathcal{C} de la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 2]$ par $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$.

On considère le point M de coordonnées $(x; -\frac{1}{2}x + 1)$ sur la courbe \mathcal{C} , ainsi que les points $H(x; 0)$ et $K(0; -\frac{1}{2}x + 1)$.

Proposition 3 : L'aire, en unités d'aire, du rectangle $OHMK$ est maximale lorsque M a pour abscisse 1.



4. On veut modéliser le temps d'attente d'un client, en minutes, à la caisse d'un supermarché par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ .

Des études statistiques montrent que la probabilité qu'un client attende plus de 7 minutes à cette caisse est de 0,417.

On rappelle que pour tout réel t positif, $P(T > t) = e^{-\lambda t}$.

Proposition 4 : Le temps d'attente moyen à cette caisse de supermarché est 9 minutes.