∽ Baccalauréat STL Métropole juin 2000 ∽
Physique de laboratoire et de procédés industriels

Durée : 4 heures Coefficient : 4

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct (unité graphique 10 cm).
Pour tout entier naturel n, on note M_n le point d'affixe $z_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} \cdot \mathrm{i}^n$ où i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$. (Par convention, pour $n = 0$, $\mathrm{i}^0 = 1$.)

1. Déterminer la forme algébrique ainsi que le module et un argument de chacun des nombres complexes z_0, z_1, z_2 et z_3.
Placer dans le plan les points M_0, M_1, M_2 et M_3.

2. Exprimer z_{n+1} en fonction de z_n. En déduire que M_{n+1} est l'image de M_n, par une rotation r de centre O. Préciser une mesure de l'angle de cette rotation.

3. **a.** Exprimer un argument de z_n en fonction de n.

b. Déterminer les entiers naturels n tels que M_n soit confondu avec M_0.

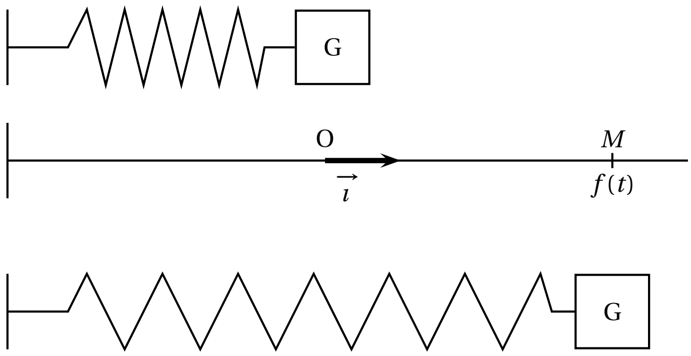
4. Pour tout entier naturel n, on note Q_n, le point d'affixe $\omega_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} \cdot \left(\dfrac{\mathrm{i}}{2}\right)^n$. (par convention, pour $n = 0$, $\left(\dfrac{\mathrm{i}}{2}\right)^0 = 1$).

a. Montrer que pour tout entier naturel n, les points O, M_n, et Q_n sont alignés.

b. Placer les points Q_0, Q_1, Q_2 et Q_3 dans le plan.

EXERCICE 2 **4 points**

Les unités physiques utilisées sont le mètre (m) et le kilogramme (kg).
Un mobile de masse 16 kg, guidé rectilignement sur un banc à coussin d'air, est attaché à un ressort dont la constante de raideur vaut $k = 1$.
Si l'on écarte le centre d'inertie G du solide de sa position d'équilibre O, alors G effectue des oscillations autour de celle-ci.
À l'instant t, la position de G est repérée par le point M d'abscisse $f(t)$ dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}\right)$.



On admettra que la fonction f est solution de l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}) \qquad : \ 16y'' + y = 0.$$

1. a. Résoudre l'équation différentielle (E).
   b. On suppose qu'à l'instant $t = 0$ le mobile est au point d'abscisse $f(0) = 0,5$ m et a une vitesse égale à $f'(0) = 0,125$ m.s^{-1}.
   Montrer que la fonction f est définie par $f(t) = \dfrac{1}{2}\left[\cos\dfrac{t}{4} + \sin\dfrac{t}{4}\right]$.
   c. Vérifier que, pour tout réel t : $f(t) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\left[\dfrac{1}{4}(t-\pi)\right]$.
2. Montrer que pour tout réel t, on a : $-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \leqslant f(t) \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
3. a. Donner la valeur positive t_0 de t pour laquelle le point M se trouve pour la première fois en O.
   b. Combien de fois le point M se trouve-t-il en O dans l'intervalle de temps $[0\,;\,35]$?

PROBLÈME **11 points**

Partie A

1. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = -2\ln x + ax^2 + bx, \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux nombres réels.}$$

   On appelle $\mathscr{C}$ la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.
   Sachant que la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point $\mathrm{A}\left(1\,;\,-\dfrac{13}{2}\right)$ et que le coefficient directeur de la tangente en A est égal à -6, déterminer les valeurs des nombres a et b.
2. Pour la suite du problème, on prendra $f(x) = -2\ln x + \dfrac{5}{2}x^2 - 9x$.
   a. Déterminer la limite en 0 de la fonction f. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?
   b. Vérifier que l'on peut écrire :

$$f(x) = x^2\left(-2\frac{\ln x}{x^2} + \frac{5}{2} - \frac{9}{x}\right).$$

   En déduire la limite en $+\infty$ de la fonction f.

Partie B

1. On désigne par f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   a. Calculer $f'(x)$.
   b. Étudier le signe de $f'(x)$.
   c. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
2. a. Démontrer que, dans l'intervalle $[3\,;\,4]$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution, notée x_0.
   b. Donner, à l'aide de la calculatrice, un encadrement d'amplitude 0,01 de x_0.
3. Déterminer une équation de la droite D tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

4. Tracer dans le repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ la droite D et la courbe $\mathscr{C}$.

Partie C

1. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$g(x) = x\ln x - x.$$

   Expliciter la dérivée g' de la fonction g.

2. Déduire de la question précédente une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
3. On appelle $\mathscr{A}$ la partie du plan située entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = x_0$ et $x = 5$ (x_0 est défini à la question **B. 2**).
   a. Hachurer sur la figure la partie $\mathscr{A}$.
   b. On désigne par A l'aire, en unités d'aire, de la partie $\mathscr{A}$. Calculer A en fonction de x_0 puis calculer une valeur approchée de A en prenant 3,88 comme valeur approchée de x_0.